KALIKATA LITTLE MAGAZINE LIBRARY-O-GABESHANA KENDRA
18/M TAMER LANE, KOLKATA-700009

Record No. : KLMLGK 2007	Place of Publication মার্কেন্টাইল প্রিন্টার্স ৭৭/১ মহাত্মা গান্ধী রোড, কল-৭
Collection : KLMLGK	Publisher কমলকুমার মজুমদার
Title অঙ্কভাবনা.	Size 7'' x 9.5'' 17.78 x 24.13 c.m.
Vol. & Number : 1/1 1/2	Year of Publication Jan, 1965 April-June 1965
	Condition : Brittle Good ✓
Editor : কমলকুমার মজুমদার, শ্যামলমোহন ঘোষ	Remarks :

C.D. Roll No. KLMLGK

অঙ্ক ভাবনা

অঙ্ক বিষয়ক বাঙলা ত্রৈমাসিক

প্রথম বর্ষ, দ্বিতীয় সংখ্যা ॥ এপ্রিল-জুন, ১৯৬৫

॥ সূচীপত্র ॥

প্রচ্ছদ চিত্র

নানাঘাট শিলালিপি : অশোক রাজত্বের একশতক পরে খোদিত এই প্রাচীন ভারতীয় শিলালিপিতে শূন্য ও বিভিন্ন সংখ্যার ব্যবহার দেখা যায়। নানাঘাট পর্বত পুণা হইতে ৭৫ মাইল দূরে অবস্থিত।

সম্পাদক

কমলকুমার মজুমদার ○ আনন্দমোহন ঘোষ

অঙ্ক ভাবনা

- অঙ্কশাস্ত্র সম্বন্ধীয় ত্রৈমাসিক পত্রিকা। প্রতি তিন মাস অন্তর বছরে মোট চারিটি সংখ্যা প্রকাশিত হয়।
- বছরের যে কোন সময় গ্রাহক হওয়া যায়। গ্রাহক মূল্য রেজিষ্ট্রেশান ডাক খরচ সহ বার্ষিক দশ টাকা। সাধারণ ডাকে পত্রিকা পাঠান হয় না। পত্রিকা ভি. পি করা হয় না।
- নমুনা সংখ্যার জন্য ২·৫০ পঃ মনিঅর্ডার করা প্রয়োজন।
- সমস্ত প্রকার চিঠিপত্র ও টাকাকড়ি, ম্যানেজার, অঙ্ক ভাবনা, ৭৭।১ মহাত্মা গান্ধী রোড, কলিকাতা-৯, এই ঠিকানায় প্রেরিতব্য
- প্রতি সংখ্যার সাধারণ মূল্য ১·৭৫ পঃ
- কলিকাতা ও বাইরে সর্বত্র এজেন্সীর জন্য যোগাযোগ করুন।
- যাঁহারা এই পত্রিকায় লিখিতে চান, তাঁহারা কোন বিষয়ে লিখিবার পূর্বে আমাদের সহিত যোগাযোগ করিয়া লিখিবেন।
- উপযুক্ত ডাকটিকিট না দিলে সব সময় চিঠির উত্তর দেওয়া সম্ভব নয়।

ঠিকানা পরিবর্তন

অঙ্ক ভাবনা পত্রিকার গ্রাহক শুভানুধ্যায়ী ও বিজ্ঞাপনদাতাদিগকে অঙ্ক ভাবনার নতুন অফিসে যোগাযোগ করিতে অনুরোধ জানাইতেছি।

অঙ্ক ভাবনা
৭৭।১, মহাত্মা গান্ধী রোড,
কলিকাতা-৯

(বেলা ১১টা হইতে ৫টা অবধি অফিস খোলা থাকিবে)

॥ সম্পাদকীয় ॥

অঙ্কভাবনা পত্রিকা অনেকেরই দৃষ্টি আকর্ষণ করিয়াছে; ভাগ্যশঃ ইহা পাঠক সাধারণ হইতে সমাদর লাভে বঞ্চিত হয় নাই; অবশ্য ইহা উল্লেখ করা প্রয়োজন যে, অনেকেই ক্ষুন্ন এ কারণ হইয়াছেন যে, প্রকাশিত প্রবন্ধ মাত্রই অনুবাদ; এই কথার একমাত্র সন্তোষজনক যুক্তি হইল যে, ইহা স্বীকার্য্য, দু একটা ক্ষেত্রে ব্যতিক্রম ব্যতীত অঙ্ক শাস্ত্র আলোচনার সকল ক্ষেত্রেই, সাধারণত, পদ্ধতি অনুসরণ আমরা করি, শাস্ত্রের যথোচিত স্বাধ্যায় নাই ফলে সঠিক জিজ্ঞাসা, বলিলে অন্যায় হইবে না আসে নাই, পাঠ্যপুস্তক ব্যতীত গ্রন্থ কোথায়, অতএব অনুবাদই একমাত্র গতি। এখন ইহাও, অবিসম্বাদী নিশ্চিত যে অনুবাদের অযুত প্রয়োজন নির্ণিয় হয়, অনুবাদ পাঠে আমাদের ভাবনা সমৃদ্ধ হইবে, অনুবাদ বিচারকে সার্থকতা দান করিবে, অনেক প্রশ্নের উদয় হইবে।

বিদেশী গ্রন্থাদি অনুবাদে আমরা যে বিষয়ে পদে পদে বাধা প্রাপ্ত হই—তাহা পরিভাষা, যাহারা এই শাস্ত্র বা অন্যান্য শাস্ত্রের পরিভাষা নির্দ্ধারণ করিয়াছেন, তাহাদের অনুসরণ কার্য্যত বিভ্রান্তির সৃষ্টি করে, যথা প্রজেক্ট ও হাইপথেসিস দুয়েরই পরিভাষা—প্রকল্প, যথা স্টান্ডার্ড ও মাগনিচিউড দুইটি বিভিন্ন শব্দের পরিভাষা—মান; এবং আমাদের পাঠক সাধারণ, হয়ত পাঠ্যপুস্তকে পড়িলেও, দৈনিক দ্বারা উক্ত শব্দগুলির তাৎপর্য্য একরূপ বুঝেন, একেবারে অন্যশাস্ত্র আলোচনায়ও তাহার অভিধা যায় না, তাই বাক্য যদি চিন্তার স্বরূপ, মননের বাস্তবতা হয়, তাহা হইলে দেখিব ঐ সকল পরিভাষায় কিয়দংশে পাঠকের বিভ্রম উপস্থিত হইবে। অনেক শব্দ লইয়া আমরা বিব্রত আছি, পরিভাষাকারীদের সমালোচনার অধিকার আমাদের নাই, তথাপি সবিনয়ে ইঙ্গিত আমরা করিব যে তাহারা যদি বিশেষ বিশেষ ক্লাসিক অঙ্কশাস্ত্র পর্য্যালোচনা করত, শাস্ত্রগত বাক্য সকলের যথার্থ স্বভাব নির্ণয়ে পরিভাষা সূচিত করার সময়, অন্যান্য শাস্ত্রে উহাদের ব্যবহার বিবেচনা করিতেন তাহা হইলে সর্বার্থ সাধক হইত।

আমাদের বিশ্বাস উক্ত বিষয়ে দর্শনশাস্ত্র স্বাধ্যায় একান্ত অপরিহার্য্য, উহা হইতে আমরা যথারীতি সাহায্য পাইতে পারি। আমরা যখনই ভাষান্তর করিয়াছি তখনই বিশেষত দর্শনধর্ম্মী বাক্যগুলি সাংখ্য বৈশেষিক ইত্যাদি হইতে গ্রহণ করিয়াছি

—ইহা ব্যতীত আটপৌরেবাক্য, শুদ্ধ সংস্কৃত নহে বলিয়া পরিত্যাগ করি নাই—এবং যথাসাধ্য একটি বাক্যের সমার্থ শব্দসকল ও তাহাদের অপভ্রংশগুলি নির্দ্ধারণে আমরা সঠিক বাক্য নির্দ্ধারণ প্রয়াসী হই—আর ঐ সকল বাক্যের সহিত বিদেশী বাক্যও উল্লেখ করি। এই প্রসঙ্গে আর এক মনোভাব প্রকাশ যুক্তিসঙ্গত নিশ্চিত যে, অনেক ক্ষেত্রে বিদেশী বাক্য পরিত্যাগ করাও অন্যায়।

পত্রদ্বারা ছয়েকজন পাঠক ভাষা সম্পর্কে মন্তব্য করিয়াছেন। প্রথমত, সম্বন্ধবোধে, রসবোধে (নবরস) মানুষের কণ্ঠস্বর যেরূপ বিভিন্ন ব্যঞ্জনা আশ্রয়ী তদ্রূপ শাস্ত্র হিসাবে ভাষার তারতম্য ঘটা উচিত, এমত ধারণা হয়; এতদ্ব্যতীত ইহা প্রসঙ্গতঃ বলা প্রয়োজন, যে ইদানীং বঙ্গভাষা কতিপয় চপলমতির ক্রীড়া হইয়া ওতপ্রোত, ফলে ঐ ভাষা অভ্যস্ত পাঠক অঙ্ক ভাবনার পাঠ অনুধাবনে অপটু হয়েন, কথ্যভাষা অধুনা সাহিত্যধর্ম্মরূপে প্রচলিত, কথ্যভাষা বলিতে কতিপয় সর্ব্বনাম ও ক্রিয়াপদ সিদ্ধান্ত হইয়াছে, আর যাহা কিছু প্রায় সকলই শুদ্ধ সংস্কৃত রহিল; এবং আরও ধীরে 'লাইনো কল্যাণে' ভাষা এক্ষণে বিকলাঙ্গ রূপ পরিগ্রহ করিয়াছে; তর্কের প্রয়োজন নাই তবু আদত যেখানে ভাষার রূপান্তর হয় সে তাহার চিন্তা চিন্তা-সূত্রেই পদবন্ধনের রূপান্তর হয় যথা কথোপকথনে, সেখানে কোন নতুনত্ব আবিষ্কার আসিল না। যাহা হউক পাঠকবর্গ যেন কিঞ্চিৎ কষ্ট স্বীকার করেন এই মাত্র অনুরোধ।

বর্ত্তমান সংখ্যায় আমরা লীলাবতীর অনুবাদে বিরত রহিলাম। পরবর্ত্তী কোন সংখ্যা হইতে সটীকও ব্যাখ্যা সহকারে লীলাবতী, পূর্বে যেরূপ, প্রকাশ করিবার ইচ্ছা রাখি।

'আর্কিমিডিসের পাটিগণিত' প্রবন্ধের টাইপ বিন্যাস নিমিত্ত কালিকা টাইপ ফাউণ্ড্রির বাবু শ্রীমলয় চক্রবর্ত্তীর নিকট আমরা চিরকৃতজ্ঞ রহিলাম।

বিজ্ঞান ও প্রকল্প

সংখ্যা ও মানগুণ্য

(৬)

যে সকল মতের উপর পৌনঃপৌনিকতার দ্বারা যুক্তিবিবেচনা ভিত্তি করিয়া আছে, তাহা অন্যান্য রূপভেদে (forms) প্রদর্শন করান যাইতে পারে। এখন, আমরা বলিতে পারি, উদাহরণ স্বরূপ।—বিভিন্ন পূর্ণসংখ্যার যে কোন একটি সসীম সমষ্টির মধ্যে দেখা যাইবে যে এমন এক সংখ্যা আছে যাহা অন্য সংখ্যার তুলনায় ক্ষুদ্র। এবং তৎক্ষণাৎই আমরা একটি নির্বচন হইতে অন্য নির্বচনে (enunciation) সোজা চলিয়া যাইতে পারি; এইভাবে, পৌনঃপৌনিকতার দ্বারা যুক্তি বিবেচনা ঠিক ঠিক ন্যায়সঙ্গত বলিয়া প্রমাণ হইয়াছে ভাবিয়া নিজেদের মনকে আঁখিঠারিতে পারি, কিন্তু ইত্যাকারে আমরা সচরাচর সর্বদাই একটি রহিত অবস্থায় আনীত হই—তথা একটি ক'রে-কর্মে দেখান অসাধ্য স্বতঃসিদ্ধর নিকট পৌছাইয়া যাই এবং যাহার প্রতিজ্ঞাটি প্রমাণ করার কথায় বা ব্যাপারে, সেটিকে আর এক ভাষায় অনুবাদ করিয়া বসি, অথচ উহা যে-কে-সেই প্রচ্ছন্নভাবে প্রমাণের পিছনে থাকিয়া যায়। অতএব পৌনঃপৌনিকতার দ্বারা যুক্তি বিবেচনার নিয়মকে যে বিরুদ্ধবাদের জন্যত্বে হ্রস্বীকরণ করা অসাধ্য এই সিদ্ধান্তটি আমরা কোন মতেই এড়াইতে পারি না। কিম্বা নিয়মটি আমাদের নিকট ক্রমান্বয় পরখ হইতে কখনও দেখা দেয় না। পরখ কার্য আমাদের শুধু শিখাইতে পারে, যে, নিয়মটি, বলা যায়, প্রথম দশ বা প্রথম একশোর জন্য ঠিক; কিন্তু কখনই অনির্দিষ্ট সংখ্যাক্রমের ব্যাপারে উহা কাজের হইবে না; কেবলমাত্র, বিশেষ কোন ক্রমের অংশের—সর্বদাই যাহা সীমিত—কম বা বেশী সংখ্যার ক্ষেত্রে প্রযোজ্য হইতে পারে।

এখন, উহাই যদি জিজ্ঞাসা-পর্যালোচনার সব কিছু হয়, তাহা হইলে বিরুদ্ধবাদের জন্যত্ব এক্ষেত্রে পর্যাপ্ত বলিব, ইহা আমাদের যত ইচ্ছা, খুসীমত, সিলজিসিম বানাইয়া (develop) তুলিতে সমর্থ করিবে। শুধুমাত্র তখনই এই জন্যত্ব ভাঙ্গিয়া পড়িবে যখন সিলজিসিমের, অসীম সংখ্যাকে সেই একটি মাত্র সূত্র দ্বারা যুত করার কথা উঠিবে এবং সেখানে পরখ কার্য কোন সাহায্যেই আসিতে অক্ষম। এই নিয়মটি বিশ্লেষণাত্মক প্রমাণ এবং পরখ কার্যর ভিতরে আসেই না উহা সঠিক পূর্বাঙ্কের মিশ্র স্বজ্ঞা ধাঁচের। অন্য পক্ষে, ইহার মধ্যে জ্যামিতিগত শর্ত ব্যাপারের মত সাবেকী ভাব দেখা যায় না।

তবে কেন এই মতকে এত দুর্দ্ধর্ষ সাক্ষ্য-প্রমাণে ভারাক্রান্ত করিয়া আমাদের উপর চাপান হইয়াছে? এই হেতু যে, যে মন উহাকে জানে, ইহা সেই মনের শক্তির বল, যাহা একই কার্যের বারংবার পুনরাবৃত্তির কল্পনা বা ধারণা করিতে পারে যখন মাত্র একবারই সে কার্য সংগঠন হওয়া

সম্ভব। মনের এই ক্ষমতা বিষয়ে প্রত্যক্ষ, সরাসরি স্বজ্ঞা আছে, পরন্ত ঐ বিষয়টির ক্ষেত্রে কাজে লাগানর সুযোগ মাত্র, এবং মন তাই এবিষয়ে সচেতন।

কিন্তু একথাও বলা যায়, যদি শুধুমাত্র পরন্ত দ্বারা পৌনঃপৌনিকতার দ্বারা—যুক্তি বিবেচনার ন্যায্যবৈধতা প্রতিষ্ঠা না করা যায় তবে ইহা কি আরোহী বিচারের পরন্তের সাহায্যে আসার জন্য? আমরা পর্যবেক্ষণ করি, যে একটি উপপাদ্য '১' সংখ্যার '২' সংখ্যার '৩' সংখ্যার এই ভাবে সংখ্যার ব্যাপারে সত্য—ন্যায় তখনই ওতোপ্রোত (manifest), এবং আমরা ধরি, সকল ভৌত ন্যায়বিধি সঠিক, একই হেতুতে সত্য, যাহা খুবই বিশদ হইলেও পর্যবেক্ষণের সীমিত সংখ্যার উপর ভিত্তি করিয়াছে।

এখন এ সত্য আমাদের দৃষ্টি এড়াইবে না যে, আরোহীর খুব সাদামাটা পদ্ধতির সহিত ইহার একটি দারুণ সাদৃশ্য আছে। তথাপি মূলগত পার্থক্য সেখানে থাকিয়া যায়। ভৌত বিজ্ঞানের ক্ষেত্রে আরোহী বিচার অনুসরণ সকল সময়ই দেখা যায় অনিশ্চিত; এই জন্যই যে বিশ্ব জগত আমাদের বাহিরে-সম্মুখে প্রতীয়মান সেই বিশ্ব জগতের সাধারণ (order) 'ক্রমে' বিশ্বাসের উপরই তাহার ভিত্তি স্থাপিত হইয়াছে। অঙ্ক শাস্ত্রগত আরোহী বিচার—অর্থাৎ পৌনঃপৌনিকতার দ্বারা প্রমাণ—অন্যপক্ষে আমাদের উপর প্রয়োজন-সঙ্গতভাবে চাপান হইয়াছে—কারণ, ইহা নিজেই মনের সত্তার গুণের বল মাত্র।

(৭)

আমি যেমন পূর্ব্বে বলিয়াছি, যে অঙ্কশাস্ত্রবিদ্গণ যে-সকল প্রতিজ্ঞাগুলি তাঁহারা বিচার করিয়া লাভ করিয়াছেন, সেইগুলিকে সকল সময়ই সাধারণায়ত করিতে যারপরনাই উদ্যোগী হন। এবং এই সূত্রে অন্য আর কোন উদাহরণ খোঁজখবর না করিয়া, আমরা কেবলমাত্র $a+১=১+a$ এর সাম্যই দেখাইলাম এবং পরে, এইটিকে $a+b=b+a$ এর সাম্য প্রতিপাদন করার জন্য ব্যবহার করিয়াছি—,এখন এই ব্যবহার সুস্পষ্টরূপে আরও ব্যাপক বা সাধারণ। অতএব, তাই, অন্যান্য বিজ্ঞান-বিষয়ের মতই, আমাদের তত্ত্ব—বিশেষ হইতে ক্রমে সাধারণ ভূমিকা পরিগ্রহ করিতে পারে। এই সত্যটি, আলোচনার পূর্ব্বাহ্ণে বড়ই দুর্বোধ্য, ধারণাতীত হইয়া আমাদের নিকট দেখা দেয়; কিন্তু এখন, নিঃসন্দেহে বলা যায়, এই সত্যে আর কোন ভাবেই হেয়ালী-রহস্য ঘোর করিয়া নাই, এই কারণে যে আমরা ক্রমে ক্রমে পৌনঃপৌনিকতা-দ্বারা-প্রমাণ এবং সাদামাটা অবরোহী বা ব্যবকলনের মধ্যে—অর্থাৎ উহাদের পার্থক্য ব্যাপারে—উপমা নির্দ্ধারণে সমর্থ হইয়াছি।

একথায় সন্দেহের অবকাশ নাই যে, অঙ্ক শাস্ত্রগত পৌনঃপৌনিক যুক্তি বিবেচনা এবং ভৌত আরোহী যুক্তি বিবেচনা পৃথক পৃথক বুনিয়াদের উপর স্থাপিত, তথাপি দেখা যাইবে উহারা যদিও একটি নির্দ্দিষ্ট সমান্তরাল দূরত্ব রাখিয়া চলিতেছে কিন্তু উহাদের গন্তব্য একই দিকে পরিচালিত অর্থাৎ যথা,—বিশেষ হইতে সাধারণ অভিমুখে।

এই বিষয়টিকে কিঞ্চিৎ যথাযথভাবে পরীক্ষা করা যাক। $a+২=২+a\cdots(১)$ এর সাম্য

প্রমাণ সিদ্ধ করিতে হইলে আমাদের $a+১=১+a$ নিয়মটি শুধুমাত্র দুইবার আরোপ করার প্রয়োজন হয় এবং তাই এই ভাবে লিখি, $a+২=a+১+১=১+a+১=১+১+a=২+a\cdots(২)$

এখন বিশ্লেষণ পদ্ধতি দ্বারা ঐরূপে যে ঐক্য ব্যবকলন বা পরিনামণ করা গেল, ইহা খুব কিছু বিশেষ দারুণ ব্যাপার নহে। ইহা আদতে ভিন্ন প্রকারের। অতএব, আমরা অঙ্ক শাস্ত্রগত সঠিক বিশ্লেষণাত্মক ও ব্যবকলন যুক্তিবিচার বিহিত ভাবে এ কথা কবুল করিতে পারি না যে, আমরা খুব সাদাসিধা অর্থেই,— বিশেষ হইতে সাধারণ অভিমুখে পরিচালিত হই। তাই দেখা যাইবে (১) সাম্যর দুইটি অংশের তুলনায় (২) সাম্যর দুইটি অংশই কেবল বড়ই জটিল মিশ্রণ মাত্র এবং এইখানেই বিশ্লেষণ, শুধুমাত্র যে সকল অনুক দ্বারা ঐ মিশ্রণ সম্ভবপর হইয়াছে সেই সকল অনুকগুলিকে পৃথক করিবার কাজে লাগে, ইহা ব্যতীত উহাদের মধ্যে সম্পর্কতত্ত্ব বিশ্লেষণ দ্বারা নির্ণয় করা যায়।

তাই গণিতশাস্ত্রবিদ্রা সব কিছুই 'নির্ম্মাণ' দিয়া সুরু করেন, বা নির্ম্মাণ করিতে করিতে অগ্রসর হন। ক্রমে তাঁহারা আরও জটিল মিশ্রণ নির্ম্মাণ করিয়া থাকেন। এবং যখন তাঁহারা এই সকল মিশ্রণ আবার বিশ্লেষণ করেন, তখন ঐ সকল মিশ্রণ, একরূপ বলা যায়, অবশেষে উহাদেরই আদি অনুকগুলির সত্ত্ব মোটামুটিভাবে সমষ্টিরূপে দেখা দেয়, আর তাঁহারা সেই অনুকগুলির মধ্যে যে সম্পর্ক বর্ত্তমান তাহা পর্য্যালোচনা করেন এবং সমষ্টিগুলির সম্পর্ক সমূহ পরিনমন করিয়াও দেখেন। এই সমগ্র পদ্ধতিই নিছকরূপে বিশ্লেষণাত্মক কিন্তু ইহা যে শুধু সাধারণ হইতে বিশেষের ঘরে যাওয়া তাহা কোন মতেই নহে; এই জন্য যে, সমষ্টিগুলি পরিচ্ছন্নরূপে, তাহাদের অনুকগুলি হইতে যে বিশেষ—এইরূপে কখনই গণ্য করা যায় না।

প্রায়শঃ এহেন 'নির্ম্মাণ' পদ্ধতির উপর, যথাযথভাবেই, খুব গুরুত্ব আরোপ করা হয় এবং অনেকেই দৃঢ়বিশ্বাস করেন, দাবি করেন, যে উহার মধ্যেই যথার্থ বিজ্ঞানের অগ্রগতির একান্ত প্রয়োজনীয় এবং পর্য্যাপ্ত সক্ষমতার (condition) শর্ত আছে। প্রয়োজনীয় অবশ্যই তবে পর্য্যাপ্ত পরিমাণ খুব কিছু এমন নহে—এই কারণ যে নির্মাণ ক্রিয়া ব্যাপারটি সর্ব্বদাই কার্যকরী হইবে, এ কথা স্বীকার্য যে শুধুমাত্র উহা বাক বৈখরী নিষ্ফল মস্তিষ্ক পরিচালনার বিষয় হইবে তাহা নহে। এই জন্য যে উহা প্রতিনিয়তই উচ্চমার্গের প্রথম উপায় হিসাবে কাজ করিবে। সর্ব্বপ্রথম উহার সত্ত্বে এমন (unity) ঐক্য থাকা বাঞ্ছনীয় যাহার দ্বারা আমরা সহজেই অনুকগুলির পাশাপাশি স্থিতি (juxtaposition) ছাড়াও আরও অনেক কিছুই দেখিতে সমর্থ হই। কিম্বা আরও নিখুঁত ভাবে বলা যায়, অনুক ছাড়াও নির্ম্মাণ ব্যাপারটি সঠিক বিবেচনা করার জন্য অন্য কোন সুযোগ একান্ত দরকার। এখন এ সুযোগ কিরূপে হইতে পারে? আমরা কেন প্রাথমিক ত্রিভুজ লইয়া বিচার বিবেচনা না করিয়া

বহুভুজ যাহা ত্রিভুজে পৃথকীকরণ করা যায় তাহা লইয়া যুক্তি বিবেচনা করি? এই জন্যই যে, যত অগনন পার্শ্ব বহুভুজটির থাকুক না কেন, তাহার সত্তা উহার মধ্যে আছে, এবং সেগুলিকে, বহুভুজগুলিকে, কোন নির্দ্দিষ্ট বহুভুজের সহিত নিঃসন্দেহে মিলাইয়া দেখা যাইতে পারে। প্রায় ক্ষেত্রেই, প্রাথমিক ত্রিভুজগুলির স্বভাব সম্পর্ক অনুশীলন সরাসরি করিয়া, অনেক চেষ্টা সাধনার পর সেই সকল সত্তা, গুণ, অবিষ্কার করা সম্ভবপর হয়।

যে কোন একটি 'নির্ম্মাণ' ক্রিয়াকে একই বর্গের (genus) প্রকারভেদ হিসাবে সূচিত করার জন্য—অন্য আর আর সদৃশ বা অনুরূপ নির্ম্মাণ ব্যাপারের পাশাপাশি রাখিয়া মিলান যায়—তখনই তাহা খুব আকর্ষণীয় হইয়া উঠে। এখন, ইহা সাব্যস্ত করিতে, কাজেকাজেই আমাদের বিশেষ হইতে সাধারণ ঘরে এক বা ততোধিক ধাপ অতিক্রম করিয়া ফিরিয়া যাইতে হয়। এখানে প্রকাশ থাক, বিশ্লেষণাত্মক পদ্ধতি—'নির্ম্মাণ ক্রিয়ার দ্বারা' যদিও আমাদের নিম্ন দিকে যাইতে বাধ্য করে না, তবু দেখা যাইবে যে, উহা আমাদের একই স্তরে স্থগিত রাখে। একমাত্র গণিতশাস্ত্রগত আরোহী বিচার সাহায্যে আমরা উচ্চ হইতে উচ্চ স্তরে নীয়মান হই, যেহেতু কেবল আরোহী বিচার হইতেই আমরা নূতন কিছু শিক্ষা লাভ করি। এই আরোহী বিচারে, ভৌত আরোহী হইতে যদিও একেবারে পৃথক্ কিন্তু একইরূপ ফলপ্রসূ এবং ইহা ব্যতীত নির্ম্মাণ ধর্ম্ম বিজ্ঞান সৃষ্টি করিতে অক্ষম।

এখন সিদ্ধান্তে এই কথা বলিব, যখন একই কর্ম্মধারা পুনঃপুনঃ অনির্দ্দিষ্টকাল ধরিয়া করা যায়, এই আরোহী বিচার তখনই সম্ভব। এবং এই দিক দিয়া দেখা যাইবে, দাবা খেলার তত্ত্ব কখনই বিজ্ঞান হইয়া দেখা দিবে না, কারণ, যেহেতু একটি ঘুঁটির রকমারি চাল সীমাবদ্ধ আর তাহা ছাড়া একটি চালের সহিত অন্য চালের মিল নাই।

দ্বিতীয় অধ্যায়

অঙ্কশাস্ত্রগত মানগুণ্য ও পরখ

অঙ্ক শাস্ত্রবিদ্‌রা সঠিক কনটিনিউয়ম (continuum) বলিতে কি অর্থ করিয়া থাকেন তাহা যদি আমরা জানিতে চাহিয়া এই ব্যাপারে জ্যামিতির শরণাপন্ন হই, তাহা হইলে তাহা নিরর্থক হইবে। একজন জ্যামিতিবিদ্ যে নকশাগুলি অনুশীলন করেন, সেইগুলিকে কিভাবে নিজের কাছে রূপায়িত করা যায় তাহারই অনুসন্ধানে তিনি ব্যস্ত, কিন্তু তাঁহার কল্পরূপগুলি তাঁহারই নিকট যন্ত্র মাত্র; ঠিক যেমন তিনি খড়িটি ব্যবহার করেন, অবিকল তেমনি ধারায়—তিনি তাঁহার জ্যামিতিতে (space) অবকাশ ব্যবহার করেন; এবং এই সূত্রে, কোন ক্রমেই অঘটনের উপর খুব কিছু গুরুত্ব আরোপ করা বিধেয় নহে; যাহা, অর্থাৎ যে অঘটন, প্রায়শঃ লক্ষণীয়, খড়ির সাদাটে ভাব হইতে বেশী করিয়া গণ্য করিবার মত নহে।

খাঁটি বিশ্লেষণকারীর পক্ষে এহেন ফাঁদকে ভয় করিবার কারণ নাই। তিনি গণিতশাস্ত্র হইতে

অধিকন্তু অকেজো অনুকগুলিকে উৎখাত করিয়াছেন; এবং এখন, একমাত্র তিনিই আমাদের প্রশ্নের উত্তর দিতে ক্ষমতা ধরেন। যথার্থ ই কনটিনিউম (continuum) কি যাহা লইয়া অঙ্ক শাস্ত্র-বিদ্‌রা যুক্তিবিবেচনা করেন—, অনেক বিশ্লেষণকারী তাঁহাদের শিল্পতত্ত্ব লইয়া গভীর আলোচনায় নিবিষ্ট—এ প্রশ্নের এ যাবৎ উত্তর দিয়াছেন, নজিরস্বরূপ তানারীর "এঁ্যাত্রোদাকশিয় আলা থেওরই দে ফোংকশিওঁ দিউন ভারিআব্‌ল" এর কথা উল্লেখ করা যায়।

এখন আমরা পূর্ণসংখ্যা লইয়া কাজ সুরু করিব—দুইটি যে কোন ধারাবাহিক গোচের (sets) এক বা তাহার বেশী মধ্যপর্য্যায়ে গোচে বসান পর-পদ-প্রবিষ্ট (intercalcate) করান যাক এবং তাহার পর এইগুলির মধ্যে-অন্তরে, পুনরায় অন্য গোচ স্থাপন করা যাক, আর এইভাবে করিয়া চলিতে হইবে। ইত্যাকারে আমরা বিবিধ ডাকের (terms) অযুত সংখ্যা পাইব, এইগুলি যে সংখ্যা হিসাবে দেখা দেয়—তাহাকে ভগ্নাংশিক, মূলদ ও প্রমেয় (commensurable) বলা হয়। কিন্তু এখানেই ইহার শেষ নয়, মনে রাখা কর্ত্তব্য যে এই ডাকের মধ্যে সংখ্যায় ইহারা অসীম—অন্য ডাক স্থাপন করাও হয়, যাহাদের অমূলদ ও অপ্রেমেয় (uncommensurable) বলা হয়।

আর বেশী দূর অগ্রসর হইবার পূর্বে, এখানেই আমি একটি প্রাথমিক, বা প্রারম্ভিক মন্তব্য করিতে চাই, যে এইরূপে ধারণাকৃত কনটিনিউয়ম (continuum) আর কিছুতেই নিদিষ্ট ক্রমে সাজান—অবশ্য, সংখ্যায় অসীম সঠিক গতানুগতিক-সাদাসিধে ধ্যানধারণা নহে, কিন্তু বাহ্যত একের পরে বা সহিত অন্যের স্থিতি; যাহাতে, সাধারণত ধরা হয় যে কনটিনিউয়মের অনুকগুলির মধ্যে এমন এক ঘনিষ্ঠ সম্বন্ধ আছে, যে পরস্পরা ঘনিষ্ঠতা উহাকে এক অটুট রূপে গঠন করে; যাহাতে, রেখার আগে বিন্দুর কোন অস্তিত্বই নাই অথচ, কিন্তু রেখা বিন্দুর পূর্বে আছে। এই হিসাবে, অ ত্যন্ত গণ্যমাণ্য, প্রখ্যাত ফরমূলা অনুযায়ী কনটিনিউয়ম 'বহুতায় একত্ব'—একত্ব নিশ্চিহ্ন হইয়াছে এবং এখন বহুতাই বিদ্যমান। তাই বলিব, ইহার বলিষ্ঠতা বিষয়ে বিশ্বাস করিয়া, গর্ব্ব অনুভব করিয়া, বিশ্লেষণকারীরা ইহার, এই তত্ত্ব লইয়া, যুক্তিবিবেচনা করেন—ফলে দেখা যাইবে তাঁহারা যেভাবে কনটিনিউয়মকে সংজ্ঞা-সূচিত করিয়া থাকেন, তাহাতে, তাঁহাদের খুব কমই যৌক্তিকতা বর্তমান। এখন পাঠকদের এইটুকু সতর্ক করাই যথেষ্ট হইবে যে, পদার্থ বিজ্ঞানবিদ্‌দের এবং অধিবিদ্যাবিৎ এর কনটিনিউয়ম হইতে যথার্থ অঙ্কশাস্ত্রগত কনটিনিউয়ম একেবারে অন্য স্বভাবের বস্তু।

সম্ভবত, একথাও বলা যাইতে পারে যে, যে অঙ্ক শাস্ত্রবিদ্‌রা এহেন সংজ্ঞা লইয়া সন্তুষ্ট—তাঁহারা নিছক বাক্যবিন্যাসের দ্বারা প্রতারিত। ঐ সকল গোচের প্রত্যেকটির রকমফের যথাযথ ভাবে প্রদর্শন করান উচিত, কেমন ভাবে তাহাদের বসান হইল তাহা ব্যাখ্যা করিয়া বুঝান উচিত, এবং দেখান উচিত যে কেমন ভাবে উহা সম্ভবপর হইল। এ কথা উত্থাপন করা ভুল হইবে—এই যুক্তিবিবেচনার বিষয়ীভূত হইয়া শুধু সেই গোচগুলিরই সত্তা আসে যাহা তাহার পূর্ববর্ত্তী বা পরবর্ত্তী অন্যসকল গোচের মধ্যে নিহিত আছে। একমাত্র উহারই সংজ্ঞার মধ্যে স্থান লাভ (intervene) করা উচিত। এবং তাই আমরা গোচগুলি কিভাবে বসান হইল বা স্থান দখল করিল তাহা

লইয়া কালক্ষয় করিব না ; ইহাও সত্য যে, যদি কেহ এই কথাটি মনে রাখেন যে জ্যামিতিবিদের ভাষায় 'সম্ভব' কথাটির সরল অর্থ প্রতিবাদ হইতে রেহাই পাওয়া, তাহা হইলে প্রয়োগ প্রযোজনার সম্ভাবনা সম্পর্কে কেহই দ্বিরুক্তি করিবেন না। এখনও কিন্তু আমাদের সংজ্ঞা সম্পূর্ণ হয় নাই, এই দীর্ঘ অপ্রাসঙ্গিক আলোচনার পর পুনরায় আমরা বিচার করিব।

অপ্রমেয়র (uncommensurable) সংজ্ঞা :—বার্লিন গোষ্ঠির অঙ্কবিদ্‌রা, বিশেষত 'ক্রণেকার', পূর্ণসংখ্যা ব্যতীত অন্যকোন অঙ্ক ব্যবহার না করিয়া অমূলদ এবং ভগ্নাংশ সংখ্যাগুলির অবিচ্ছিন্ন গ্রাম নির্ম্মাণ করিতে একনিষ্ঠভাবে নিয়োজিত। এই মতের ব্যাপারে বলা যায়, অঙ্ক শাস্ত্রগত কনটিনিউয়ম সম্পূর্ণরূপে মনগড়া বিষয়, এবং ইহাতে পরখের কোন স্থান নাই।

মূলদ সংখ্যার ভাবাদর্শ তাঁহাদের কাছে কোন সূত্রেই প্রতিবন্ধক হইয়া দেখা দেয় না ; তাঁহারা অপ্রমেয় সংখ্যাকেই শুধু সংজ্ঞায় সূচিত করার জন্য একনিষ্ঠভাবে সাধনা করিয়াছেন। তাঁহাদের সেই সংজ্ঞাকে জ্ঞাপন করিবার পূর্ব্বে আমার মনে হয় কিঞ্চিৎ মন্তব্য করা সমীচীন, কেন না যে সকল পাঠকরা জ্যামিতিবিদ্‌দের আচার অভ্যাস সম্পর্কে খুব অল্পই অবহিত, তাহাদের উহা যারপরনাই বিস্ময় উৎপাদন করিতে পারে, যথা, অঙ্কবিদ্‌রা কোন সূত্রেই বস্তুসকল অনুশীলন করেন না, পরন্তু বস্তুসকলের মধ্যে যে সম্বন্ধ থাকে তাহাই অনুশীলন করাই তাঁহাদের লক্ষ্য। বস্তু সকলের সম্বন্ধ হেরফের না করিয়া যদি তাহাদের পরিবর্ত্তে অন্য কিছুর দ্বারা প্রতিস্থাপনা করা হয়, সেক্ষেত্রে তাঁহাদের কোনই ব্যাঘাত হয় না, তাঁহাদের লক্ষ্য পদার্থ প্রকৃতি অনুধাবন করা নহে, তাহারা কেবলমাত্র আঙ্গিক বিষয়েই জিজ্ঞাসু।

'ক্রণেকার' যে অতি সরল প্রতীক দ্বারা এই অপ্রমেয় সংখ্যার নামকরণ করিয়াছেন তাহা আমাদের পক্ষে একরূপ বুঝিয়া উঠা দুঃসাধ্য হইবে, যদি আমরা এই সহজ কথাটি স্মরণে না রাখি যে, যথা বলা যায়, আমাদের ধ্যান-ধারণার ভাবাদর্শ হইতে উহা ভিন্ন ধরণের, আমাদের ক্ষেত্রে এমন এক মাত্রিক নিশ্চিত পাওয়া দরকার যাহা পরিমেয় সাপেক্ষ এবং প্রায় অংশেই যাহা অধিগম্য।

এখন পর্য্যালোচনা করিয়া দেখা যাক 'ক্রণেকারে'র সংজ্ঞাটি কিরূপ। প্রমেয় সংখ্যাগুলিকে বহু প্রকারে শ্রেণী ভাগ করা যাইতে পারে এবং সেই ভাগ এই শর্ত অনুযায়ী হইবে যে, প্রথম শ্রেণীর যে কোন সংখ্যাই দ্বিতীয় শ্রেণীর যে কোন সংখ্যা হইতে বড় বা উচ্চ মানের ; ইহাতে আবার এধরণের ব্যাপারও ঘটা সম্ভবপর যে, প্রথম শ্রেণীর সংখ্যা সকলের মধ্যে এমন একটি সংখ্যা আছে—যাহা অন্যান্য সংখ্যা হইতে ছোট ; এখন, যদি প্রথম শ্রেণীতে, ধরা যাক, '২' সংখ্যাটি লইয়া এবং '২' হইতে বড় বড় সংখ্যা এবং দ্বিতীয় শ্রেণীতে '২' হইতে সমস্ত সংখ্যা ছোট ধরা হয়, তখন খুব স্পষ্টত দেখা যাইবে, '২' সংখ্যাটি প্রথম শ্রেণীর সমস্ত সংখ্যার তুলনায় সর্ব্বনিম্ন হিসাবে দেখা দিবে। তাই '২' সংখ্যাটিকে এই ভাগের প্রতীকরূপে বাছাই করা যাইতে পারে।

এখন ইহাও সম্ভব হইতে পারে যে, অন্যপক্ষে, দ্বিতীয় শ্রেণীর মধ্যে এমন এক সংখ্যা

বর্ত্তমান যাহা অন্য আর সকল সংখ্যার তুলনায় সর্ব্ব উচ্চ মানের ; তখন ফলে এই ব্যাপার ঘটে, উদাহরণ স্বরূপ,—যদি প্রথম শ্রেণীতে '২' হইতে বড় বড় সংখ্যাগুলি ধরা হয়—এবং যদি দ্বিতীয় শ্রেণীতে, '২' কে লইয়া, '২' হইতে ছোট ছোট সংখ্যা সকল আলাদা করা হয়—তখনই '২' সংখ্যাটিকে, এখানেও, আবার এই ভাগের প্রতীকরূপে ধার্য্য করা যায়।

কিন্তু এ ব্যাপারও সমানই ঘটিতে পারে, যে আমরা প্রথম শ্রেণীতে এমন কোন সংখ্যা খুঁজিয়া পাইব না যাহা অন্য সকল সংখ্যার তুলনায় ক্ষুদ্র, অথবা দ্বিতীয় শ্রেণীতেও এমন সংখ্যা পাইব না যাহা অন্যসকলের তুলনায় বড়। এই সূত্রে, ভাবা যাক—প্রথম শ্রেণীতে আমরা সমস্ত সংখ্যাই যাহাদের বর্গ '২' হইতে বড়, সেইগুলিকে এবং দ্বিতীয় শ্রেণীতে '২' হইতে যাহাদের বর্গ ক্ষুদ্র সেইগুলিকে রাখিলাম। এখন আমরা জানি যে ঐ দুইভাগের মধ্যে এমন কোন সংখ্যার বর্গ ই নাই যাহা '২'এর সমান। ফলত, সাক্ষাৎ বলা যায়, প্রথম শ্রেণীতে এমন কোন সংখ্যাই নাই যাহা অন্য সকল সংখ্যার তুলনায় ক্ষুদ্র—কারণ সংখ্যার বর্গে '২'এর যতই কাছাকাছি যাক না কেন সমান হইবে না ; তবে সর্ব্বসময় আমরা এমন প্রমেয় সংখ্যা পাইতে পারি যাহার বর্গ প্রায় '২'এর কাছাকাছি হয়। 'ক্রণেকারে'র সাব্যস্ত মতের দিক হইতে এই অপ্রমেয় সংখ্যা √২টি সেই প্রমেয় সংখ্যাসকল ভাগের বিশেষ পদ্ধতির প্রতীক ছাড়া আর অন্য কিছুই নয় ; এবং প্রত্যেকটি পুনঃ দ্বিধাকরণের ধারার প্রতিউত্তরে—তাহা প্রমেয়ই হোক আর নাইই হোক এই ভাবে এক সংখ্যায় দেখা দেয়, যে-সংখ্যা প্রতীকরূপে ব্যবহৃত হয়। তবে ইহা লইয়া সন্তুষ্ট থাকার অর্থ হইবে এই যে, এই প্রতীক সকলের আদি উৎপত্তি বিষয়ে আমরা বিস্মৃত হইব ; এবং কোন বুদ্ধির দ্বারা চালিত হইয়া তাহাদের যে একটা মূর্ত্ত অস্তিত্ব আছে তাহা আমরা আরোপ করিলাম,—একথা ইহা ব্যাখ্যা করাও বাকি থাকিয়া যায় এবং অন্য পক্ষে ভগ্নাংশের ব্যাপারে বাধাবিপত্তির কি সূত্রপাত ঘটে না, বা আরম্ভ হয় না ?

পূর্বাহ্ণে যদি আমরা সেই বিষয় (matter) না জানি যে, যাহা, অনবরত ভাগ-সাপেক্ষ অর্থাৎ কনটিনিউয়ম—তাহা হইলে কি আমরা ঐ সকল সংখ্যাগুলির আন্দাজ পাইব ?

ভৌত কনটিনিউয়ম—অঙ্ক শাস্ত্রগত কনটিনিউয়মের ভাবাদর্শ সত্যই কি পরখ হইতে সোজাসুজি বাহির হইয়াছে কিম্বা নয় তাহা এখন আমাদের প্রশ্নের বিষয়। যদি তাহাই হয়, তাহা হইলে পরখের উপাত্তগুলি—যাহা আমাদের নিছক সংবেদন, উহাকে মিত করা যাইতে পারে। এবং একথা বিশ্বাস করিতে প্ররোচিত হইব, যে ইহা সত্যই সম্ভব, কেন না কিছুদিন হইল উহা পরিমেয় করা প্রয়াস চলিতেছে এবং একটি নিয়মও বিধিবদ্ধ হইয়াছে, এই নিয়মটিকে বলা হয় 'ফেকনারের নিয়ম' (Fechner's Law) ইহা বলে, 'সংবেদন—সংবর্গমানের উদ্দীপকের সমানুপাতিক'। কিন্তু যে সকল পরখ দ্বারা এই নিয়ম প্রবর্ত্তন করার আগ্রহ, প্রচেষ্টা চলিতেছে সেগুলিকে যদি আমরা বিচার করিয়া দেখি তাহা হইলে দেখিব, যে, বিচার আমাদের পুরাপুরি ঠিক উল্টা সিদ্ধান্তে লইয়া যায়। উদাহরণ স্বরূপ যথা—এই ব্যাপার পরিলক্ষিত হইয়াছে যে '১০' গ্রাম ভার—A এবং ১১ গ্রাম

ভার—Bতে একই-সমানই সংবেদনের উদয় হয়, আবার আর একটি ভার 'C' যাহার '১২' গ্রাম—B-এর সহিত তাহার কোন পার্থক্যই দেখা যায় না, অথচ ভার—A এর সহিত 'ভার—C' এর পার্থক্য দেখা যায়। অতএব পরখ সকলের মোটামুটি ফলগুলিকে এইভাবে এই সম্বন্ধে প্রকাশ করা যায়—$A = B$, $B = C$, $A < C$ এবং ইহাকে ভৌত কনটিনিউয়মের সূত্র বলিয়া গণ্য করা যাইতে পারে। কিন্তু এখানে বিরুদ্ধবাদের নিয়মের সহিত ঘোর অমিল রহিয়াছে দেখা যায়, এই অমিলকে বিদূরিত করার উদ্দেশ্যেই আমাদের অঙ্কশাস্ত্রগত কনটিনিউয়ম আবিষ্কার করিতে বাধ্য করে। তাই আমরা এই সিদ্ধান্ত করিতে পরিচালিত হই যে ঐ ধারণা একেবারেই মন হইতে সৃষ্ট, এবং পরখ ব্যাপারেই সে সুযোগের কারণ হইয়াছে। আমরা কোনক্রমেই বিশ্বাস করিতে পারি না দুইটি মাত্রিক যাহা তৃতীয়টির সমান—সমান অথচ একের সঙ্গে অন্য সমান নহে, তাই A নিশ্চয়ই B হইতে ভিন্ন এবং B, C হইতে ভিন্ন প্রকারের এই কথা সাব্যস্ত করিতে পরিচালিত হই, এবং যদি আমরা এই সত্য সম্পর্কে অবহিত না হই—তাহা হইলে বুঝিতে হইবে আমাদের চেতনের ত্রুটিই তাহার কারণ?

—আঁরি প্যাওয়াকারে কৃত 'সায়েন্স ও হাইপথেসিস'
হইতে কমলকুমার মজুমদার অনূদিত।

গাণিতিক সম্ভাব্যতার উপক্রমণিকা

লোকমুখে মহাবিজ্ঞানী নিউটনের নামে একটি খোসগল্প প্রচলিত আছে। মাধ্যাকর্ষণসূত্র আবিষ্কারের মূলে নাকি একটি পতনশীল আপেলফল বর্তমান। এবম্বিধ কাহিনীর সত্যতাবিষয়ে সন্দেহ অত্যন্ত স্বাভাবিক; কিন্তু নিউটনের কালে যে আপেলফল মাটির দিকে পড়িত, নিউটনের আগে এবং এখন পর্যন্তও পৃথিবীর সর্বত্র, এই বিষয়ে কোন সন্দেহ নাই। আরো বহুবিধ ঘটনা আমাদের দৈনন্দিন জীবনে পরিলক্ষিত হয়, যেমন অগ্নি হইতে আলোকের সৃষ্টি হইয়া থাকে, যেমন কোন বস্তুকে অন্য কোন কঠিন বস্তুর দ্বারা আঘাত করিলে তাহা হইতে শব্দ সৃষ্ট হওয়া স্বাভাবিক। উপরের উদাহরণগুলিকে আমরা বিশেষ অর্থে আবশ্যকীয়তা (necessity) বলিয়া অভিহিত করিতে পারি। আপেলফল মাটির দিকে নামিয়া আসে না এমন কোন ঘটনা আমাদের জানা নাই, নির্দিষ্ট উষ্ণতার উর্দ্ধে জল বাষ্পে পরিণত হয় না এবম্বিধ দৃষ্টান্ত কাহারও বিদিত নহে, কোন বস্তুকে কোন কঠিন বস্তুর দ্বারা আঘাত করিলে তাহা হইতে সদাসর্বদাই শব্দ নির্গত হইয়া থাকে। এবম্প্রকার আবশ্যকীয়তাকে বস্তুগত (ভৌত) আবশ্যকীয়তা (physical necessity) বলিয়া অভিহিত করা হয়।

অন্য আরেকপ্রকার আবশ্যকীয়তার কথাও এইক্ষেত্রে উল্লেখযোগ্য। তাহাদিগকে ন্যায়-সঙ্গত আবশ্যকীয়তার (logical necessity) বলা হইয়া থাকে। আমরা যদি ইউক্লিডের জ্যামিতি বিষয়ে স্থির-নিশ্চয় থাকি তাহা হইলে এই কথা মানিয়া লইতে আমরা অনন্যোপায়, ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর সমষ্টি একত্রে তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বড়। এই সত্য অস্বীকার করিলে ইউক্লিডের অঙ্কশাস্ত্রের সমস্তটাই অর্থহীন হইয়া যায়। সুতরাং, ত্রিভুজের যে কোন বাহু অপর দুই বাহুর সমষ্টি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর এই কথা স্বীকার করিয়া লইতে আমরা বাধ্য। এবম্প্রকার আবশ্যকীয়তাকে যুক্তিগ্রাহ্য আবশ্যকীয়তা বলা হইয়া থাকে।

বস্তুগ্রাহ্য আবশ্যকীয়তাকে অনেক সময় জাগতিক কানুন (natural law) নামে অভিহিত করা হয়। মনে স্বভাবতই এই প্রশ্ন জাগিয়া থাকে যে জাগতিক কানুনগুলি কি সর্বক্ষেত্রে ও সর্বসময় নিশ্চিত? ইহার উত্তরে না ভিন্ন অন্য কিছু বলা অযৌক্তিক। কিন্তু সাধারণ ক্ষেত্রে ঐগুলি সত্য বলিয়া ধরিয়া লওয়া হয়। যখন জাগতিক কানুনের এক্তিয়ারবহির্ভূত (!) কোন ঘটনা ঘটিয়া যায়, আমরা যারপরনাই আশ্চর্যান্বিত হই, বলি, ইহা একটি আশ্চর্যজনক ঘটনা। আশ্চর্যজনক ঘটনার সম্ভাবনা, আমাদের অভিজ্ঞতা হইতে জানিতে পারি, নিরতিশয় কম, সুতরাং নগণ্য।

প্রসঙ্গক্রমে দৈবসম্ভাবনার (chance) কথাও না আসিয়া পারে না। মুদ্রাক্ষেপণের কথা সকলেরই জানা থাকা স্বাভাবিক। মুদ্রার দুইটি দিক আছে, ইংরাজীতে উহাদিগকে হেড ও টেল

বলা হইয়া থাকে। ক্ষেপণান্তে কোন দিক উপরিভাগে থাকিবে, তাহা অনির্দিষ্ট। দুই দিকেরই উপরিভাগে থাকিবার দৈবসম্ভাবনা সমান, যদি না অন্য কোন বিষয়ের হস্তক্ষেপ ঘটে। প্রাথমিক অবস্থিতি, ক্ষেপণশক্তি প্রভৃতির উপর ফলাফল সদাসর্বদাই নির্ভরশীল। বহুবার মুদ্রাক্ষেপণ করিলে দেখা যাইবে যে হেড ও টেলের সংখ্যা পরস্পরের অতি নিকট। এই কারণে বলা হইয়া থাকে যে উহাদের সম্ভাবনা সমান, উভয়েরই সম্ভাবনা $\frac{১}{২}$।

লুডো খেলার ঘুটিতে ছয়টি দিক আছে—১,২,৩,৪,৫,৬ সংখ্যাত। এই ক্ষেত্রেও যে কোন সংখ্যাতদিকের উপরিভাগে থাকিবার সম্ভাবনা সমান। সর্বসাকুল্যে দৈবসম্ভাবনা ছয়টি, প্রতিটির নিজস্ব সম্ভাবনা তাই $\frac{১}{৬}$।

পরিসংখ্যান হইতে এই কথা জানা যায় কোন নগরের, যেমন কলিকাতার, যেমন বোম্বাইয়ের, জন্ম মৃত্যু বিবাহ, বিবাহবিচ্ছেদ, আত্মহত্যা পুনর্বিবাহ, চুরি ডাকাতি খুন, প্রতি লক্ষ নাগরিকে, নাতিদীর্ঘকালের মধ্যে এবং সাধারণভাবে অন্যান্য সামাজিক বিষয় সকল সমতা রক্ষা করিলে, অবিকল সমান না হইলেও মোটামুটিভাবে কোন এক নির্দিষ্ট সংখ্যার নিকটবর্তী থাকিবে। অন্য অনেক বিষয় রহিয়া যায়, যেমন যুদ্ধ, যেমন দুর্ভিক্ষ বা মহামারী যাহা সম্পূর্ণত আমাদের জ্ঞান ও ধারণার বহির্ভূত ঘটনা, যাহারা ঐ সংখ্যার পরিবর্তনের জন্য দায়ী। এই ক্ষেত্রেও কোন বিশেষ বৎসরে জন্ম-মৃত্যু-বিবাহাদির দৈবসম্ভাবনা কিরূপ তাহা নির্ধারণ করা সম্ভব।

কোন বাক্সে যদি সাদা ও কালো উভয় রঙেরই কিছু বল থাকে তবে চোখ বুজিয়া কোন বল তুলিয়া লইলে তাহা সাদা বা কালো যে কোন রঙেরই বল হইতে পারে। দুই রঙেরই বলের সংখ্যা সমান হইলে এবং রঙ ছাড়া উহাদের অন্য কোন পার্থক্য না থাকিলে সাদা বা কালো বল তুলিবার দৈবসম্ভাবনা (chance) সমান।

এইরূপে আরো বহুবিধ উদাহরণের সাহায্যে গাণিতিক দৈবসম্ভাবনার বিষয় আলোচনা করা যায়। উদাহরণের সংখ্যা আর না বাড়াইয়া আমরা সাধারণভাবে বলিতে পারি, কোন নির্দিষ্ট নিয়মের মধ্যে যদি ক, খ, গ, ঘ—এই চারিটি ঘটনা ঘটিবার সম্ভাবনা থাকে, তবে 'ক' ঘটিবার সম্ভাবনা বা 'খ' কিংবা 'গ', এমন কতকগুলি নিয়ন্ত্রণবহির্ভূত বিষয়ের উপর নির্ভরশীল যে উহাদের ঘটিবার জন্য দৈবসম্ভাবনার উপর নির্ভর করিতে হয়।

দৈবসম্ভাবনা (chance) আমাদিগকে সম্ভাবনা বিষয়ে (probability) কৌতূহলী করিয়া তোলে। সম্ভাবনাকে আমরা দৈবসম্ভাবনার মাত্রা বলিয়া অভিহিত করিতে পারি। সংবাদপত্রে যখন বলা হইয়া থাকে যে অদ্য লোকসভায় তুমুল উত্তেজনার সম্ভাবনা আছে, ইহার অর্থ এই, অন্যান্য বিষয়, যেমন পূর্বদিনের ঘটনাবলী, যেমন আলোচ্যবিষয় ইত্যাদি, হইতে উত্তেজনার সম্ভাবনা অধিক বলিয়া বোধ হয়। কোন শিশুকে দেখাইয়া যখন বলা হইয়া থাকে, ঐ শিশুটির বড় হইলে শিল্পী হইবার সম্ভাবনা আছে, অন্যবিষয়, যেমন, পারিবারিক প্রেরণা, শিল্পবিষয়ে শিশুটির অনুরাগ, শিশুবয়সেই কৃত কোন কোন নজির ইত্যাদি ঐ সম্ভাবনার নেপথ্যে ক্রিয়াশীল।

অত্যন্ত জোরে গাড়ি চালাইলে দুর্ঘটনার সম্ভাবনা আছে, নিরীহ পদচারণায়ও দুর্ঘটনার সম্ভাবনা কম নহে। ইহা সুবিদিত যে অত্যন্ত জোরে গাড়ি চালাইলে দুর্ঘটনার সম্ভাবনা অধিকতর, এইরূপ সিদ্ধান্তের মূলে নিজস্ব অভিজ্ঞতা বিরাজমান।

ঘোড়দৌড় বিষয়ে বলা হইয়া থাকে অমুক দুইটি ঘোড়ার মধ্যে অমুক ঘোড়াটির বাজি জিতিবার সম্ভাবনা ৭ : ৯, কিংবা উইম্বলডন্ টেনিস প্রতিযোগিতার সর্বশেষ খেলায় অমুক খেলোয়াড়ের জিতিবার সম্ভাবনা ১০ : ৭। অভিজ্ঞরা ঘোড়া দুইটির দৌড়াইবার ক্ষমতা, পূর্ব রেকর্ড, জকির এলেম প্রভৃতি বিষয়ে বিচার বিবেচনা করিয়া সম্ভাবনাকে সংখ্যাত করিয়া তোলেন, উইম্বলডন্ টেনিস প্রতিযোগিতার ক্ষেত্রেও ইহাই। এইরূপ আরো বহুবিধ উদাহরণ দেখানো যাইতে পারে, যাহার দ্বারা ইহাই প্রতীয়মান হয় সম্ভাবনাকে সংখ্যাত করিয়া তুলিবার, সংখ্যার সাহায্যে বুঝিবার এই প্রবণতা আমাদের মধ্যে রহিয়াছে।

একটি বাক্সে যদি একটি সাদা ও একটি কালো বল থাকে তবে চোখ বুজিয়া একটি বল তুলিলে উহা সাদা কিংবা কালো, যে কোন রঙেরই বল হইতে পারে। সাধারণভাবেই এই কথা বলা সম্ভব, বলটি সাদা কিংবা কালো রঙের হইবার সম্ভাবনা সমান। সংখ্যার সাহায্যে বর্ণিত করিতে হইলে আমরা বলিব উহাদের উভয়েরই সম্ভাবনা $\frac{১}{২}$, যেহেতু মোট বলের সংখ্যা ২, যাহার মধ্যে সাদা ও কালো প্রতিটি বলের সংখ্যা ১। বাক্সে যদি ১০টি সাদারঙের বল ও মাত্র ১টি কালো রঙের বল থাকে, তবে অবশ্যই সাদা রঙের বল তুলিবার সম্ভাবনা অনেক বেশী। এই ক্ষেত্রে মোট বল ১১টা, যাহার মধ্যে সাদা ও কালো রঙের বলের সংখ্যা যথাক্রমে ১০ ও ১। অতএব, সাদা রঙের বল তুলিবার সম্ভাবনা $\frac{১০}{১১}$ এবং কালো রঙের বল তুলিবার সম্ভাবনা $\frac{১}{১১}$। সাদা বল ৬টি ও কালো বল ৩টি হইলে সাদা বল ও কালো বল তুলিবার সম্ভাবনা যথাক্রমে $\frac{৬}{৯}$ ও $\frac{৩}{৯}$ অর্থাৎ $\frac{২}{৩}$ ও $\frac{১}{৩}$। এই প্রকারেই সম্ভাবনাকে সংখ্যার সাহায্যে প্রকাশ করা হইয়া থাকে। উপরেই শেষ উদাহরণের ক্ষেত্রে আমরা বলিতে পারি সাদা বল তুলিবার সম্ভাবনা ২ : ১।

তীক্ষ্ণ বুদ্ধি ও পরিণত বিচারবুদ্ধি সম্পন্ন যে কোন লোকের পক্ষে কোন্ ঘটনা ঘটিবার সম্ভাবনা অধিকতর, তাহা নির্ণয় করা সম্ভব। কিন্তু সেই সম্ভাবনাকে সাঙ্কেতিক উপায়ে, সংক্ষেপে ও অতি নিপুণভাবে প্রকাশ করিবার জন্য তাঁহাকে সংখ্যার সাহায্য লইতে হয়।

ইতিপূর্বে কয়েকবার বাক্সের মধ্যে সাদা ও কালো বলের বিষয়টির প্রতি দৃষ্টি আকর্ষণ করিয়াছি। বিষয়টি জটিলতর হইয়া উঠিবে যখন সাদা ও কালো বলের সংখ্যা জানা থাকিবে না। এইক্ষেত্রে সাদা ও কালো বল তুলিবার সম্ভাবনা নিরূপিত করা সম্ভব নহে। যেহেতু বলগুলির সংখ্যা সম্পর্কে কিছুই জানা নাই, বিচারবুদ্ধি প্রয়োগ অনাবশ্যক হইয়া যায়। কিন্তু যদি জানা থাকে, সাদা ও কালো বলের সংখ্যা সমান, সংখ্যাটি জানা না থাকিলেও, তৎক্ষণাৎ অনায়াসেই বলা যাইতে পারে যে উহাদের তুলিবার সম্ভাবনাও এক অর্থাৎ উভয়েরই $\frac{১}{২}$ সম্ভাবনা।

বিস্তৃত আলোচনার ক্ষেত্রে জটিলতর গাণিতিক কৌশলের প্রয়োজন। উপক্রমণিকার

ক্ষেত্রে উহা স্থগিত রাখিলেও ক্ষতি নাই। অঙ্কশাস্ত্রে সম্ভাব্যতার প্রশ্ন অপেক্ষাকৃত আধুনিক। প্রাচীন অঙ্কশাস্ত্রে এই সম্ভাব্যতার উল্লেখ পরিলক্ষিত হয় না। মহাবিজ্ঞানী গ্যালেলিওর ধারণায় প্রথম দৈবসম্ভাবনার (chance) আবির্ভাব ঘটে। বাস্তবিকক্ষেত্রে অঙ্কশাস্ত্রে এইরূপ সম্ভাবনার বিষয় লইয়া সপ্তদশ শতাব্দীর দুই বিজ্ঞানী প্যাস্কেল্ (১৬২৩—১৬৬২) ও ফারমাট (১৬০১—১৬৬৫) প্রথম আলোচনা করেন। সেভিয়ার দ্য মারে নামে জনৈক ফরাসী ভদ্রলোক প্যাস্কেল্‌কে বৈজ্ঞানিক তত্ত্ব ও ব্যবহারিক ক্ষেত্রের গরমিল বিষয়ে কিছু প্রশ্ন করিয়াছিলেন। এই সময় প্যাস্কেলের মন প্রথম সম্ভাবনা সম্পর্কে ধারণা করে এবং তিনি ঐ বিষয় লইয়া আলোচনা করেন। এই আলোচনা ফরের্মাকে কৌতূহলী ও উৎসাহিত করে। এই দুই বিজ্ঞানী সম্মিলিতভাবে সম্ভাবনার শাস্ত্রকে গড়িয়া তুলিলেন।

হেগেন্‌স্ (১৬২৯—১৬৭৫), জেকব বেয়ারনলি (১৬৫৪—১৭০৫) আব্রাহাম দ্য মভিয়ার (১৬৬৭—১৭৫৪) ল্যাপ্লাস (১৭৪৯—১৮২৭)—এই সব বিজ্ঞান জগতের মহাজনেরাও নিজেদের বিচারবুদ্ধি ও কল্পনাশক্তির সাহায্যে গণিতের এই বিভাগকে যথেষ্ট সমৃদ্ধ করিয়া গিয়াছেন।

পরিশেষে উল্লেখনীয়, অঙ্কশাস্ত্রে এই সম্ভাব্যতার বিভাগটি বিশ্বাসভিত্তিক; অর্থাৎ কিছু বিশ্বাসকে অবলম্বন না করিলে এই শাস্ত্রে বেশীদূর অগ্রসর হওয়া সম্ভব নহে। সম্ভাবনাগুলির অস্তিত্বের সম্ভাবনা স্বভাবতই মানিয়া লইতে আমরা বাধ্য। কিছু বিশ্বাস ছাড়া এই শাস্ত্র, এবং আরো অনেক শাস্ত্রই, গড়িয়া তোলা সম্ভব নহে। বস্তুত, বৈজ্ঞানিক জ্ঞানের ভিত্তিদেশে, অনুসন্ধিৎসার মূলে, প্রেরণার আদিতে, সদাসর্বদাই বিশ্বাস বিদ্যমান। আধুনিক পদার্থবিজ্ঞান ইলেকট্রনের উপর নির্ভর করিয়া দাঁড়াইয়া আছে, যাহার অস্তিত্বে সন্দেহ করিলে আর উপায় নাই। পল বলিয়াছেন 'Faith is the substance of things hoped for, the evidence of things not seen.' বিশ্বাস বা মতি অভিপ্রেত বস্তুনিচয়ের মূল বা আধার, সেই বস্তুনিচয়ের সাক্ষ্য প্রমাণ, যাহা নিয়ত অদৃশ্য।

ঋণস্বীকার: Introduction to Mathematical Probability
by J. V. Uspensky.

সুব্রত চক্রবর্তী

বীজগণিতের ইতিকথা

॥ রেণেশাঁস ॥

রেণেশাঁস যুগে বীজগণিতের (Algebra) উপর প্রথম চিন্তাশীল লেখা প্যাচিঅলির (Pacioli) সুমা (Suma)—১৪৯৪ খৃষ্টাব্দে রচিত হইয়াছিল। স্বচ্ছভাবে না হইলেও এই পুস্তকটিতে বীজগণিত সম্বন্ধীয় তৎকালীন চিন্তাধারা মোটামুটি ভাবে সংগৃহীত হইয়াছিল; প্রচলিত স্থূল প্রতীকরীতির সহায়তায় এই পুস্তকটীতে সমীকরণ একটি বিশিষ্টতা অর্জন করিয়াছিল।

ইহার পরবর্তী সময়ে উল্লেখযোগ্য গ্রন্থ পুরোপুরি বীজগণিত লইয়া লিখিত প্রথম পুস্তক হইল—রুডলফ্ এর 'ক্যস্' (১৫২৫ খৃঃ)। মতবাদের দিক হইতে সবিশেষ উন্নত না হইলেও বর্গমূল প্রতীকরীতির উন্নতিবিধানে এবং জার্মাণীতে বীজগণিতের প্রসারে এই পুস্তকটির বিশেষ অবদান রহিয়াছে। ১৫৫৩-৫৪ খৃষ্টাব্দে ষ্টিফেল (Stifel) এই পুস্তকটির নবতর সংস্করণ ছাপাইয়া ইহার গুরুত্ব আরও বাড়াইয়া দিয়াছিলেন।

ছাপার হরফে প্রথম যুগান্তকারী বীজগণিতের বই কিন্তু কার্দান্ বিরচিত 'আর্স ম্যাগনা' (Ars Magna)—১৫৪৫ খৃষ্টাব্দে, প্রধানতঃ সমীকরণ সমাধানের উপর ভিত্তি করিয়া রচিত হইয়াছিল। দ্বিঘাত, ত্রিঘাত সমীকরণ ছাড়াও ইহাতে জটিল রাশির (Complex Number) ব্যবহার ছিল। এককথায় এই পুস্তকটিকে আধুনিক বীজগণিতের দিকে প্রথম পদক্ষেপ বলিয়া পরিগণিত করা যাইতে পারে।

ইহার পরবর্তী বীজগণিত সম্বন্ধীয় উল্লেখযোগ্য মুদ্রিত রচনা তারতাগলিয়া কৃত 'জেনারেল ত্রাটো' (১৫৫৬-১৫৬০)। যদিও কার্দান্-এর সহিত তাহার ঘন সমীকরণ সংক্রান্ত বিরোধ এই পুস্তক রচনার পুর্বেই তাহার অন্য পুস্তকে প্রকাশিত হইয়াছিল (১৫৪৬)।

ইংল্যাণ্ডে বীজগণিতের পাঠ্যপুস্তক প্রকাশের প্রথম প্রচেষ্টা করিয়াছিলেন রবার্ট রেকর্ড (Robert Recorde] ১৫৫৭ খৃষ্টাব্দে। তাঁহার 'হোয়েট ষ্টোন অফ উইটে' তৎকালীন সময়ের তুলনায় একটি সর্বাংগ সুন্দর প্রামাণ্য গ্রন্থ। পরবর্তীকালে তাঁহারই প্রয়াসে মাস্টারসন (Masterson) এর অসম্পূর্ণ লেখা প্রকাশিত হইয়াছিল ১৫৯২—১৫৯৫ খৃষ্টাব্দের মধ্যে। ১৫৭২ খৃষ্টাব্দে বীজগণিতের প্রথম ইতালীয় ভাষার পাঠ্য পুস্তক প্রণয়ন করিয়াছিলেন বম্বেল্লি (Bombelli)।

প্রাথমিক বীজগণিত এই সময় মোটামুটি পরিণত স্তরে পৌছিয়াছিল। তখন পর্যন্ত কেবল মাত্র প্রতীকরীতির আরও কিছু উন্নতিবিধানের প্রয়োজনীয়তা ছিল, যাহা পরবর্তীকালে ভিয়েতা (Vieta) ১৫৯০ খৃঃ, হ্যারিয়ট (Harriot) ১৬১০ খৃঃ, ওউটরেড (Oughtred) ১৬২৮ খৃঃ, দে কার্তে (Des cartes) ১৬৩৭ খৃঃ এবং নিউটন যুগের বৃটিশ পণ্ডিতদের ঐকান্তিক প্রয়াসে সাধিত হইয়াছিল।

প্রাথমিক বীজগণিতের প্রধান অংশ এই ভাবে দেখা গেল সপ্তদশ শতাব্দীতেই পূর্ণতা লাভ করিয়াছে।

॥ এ্যালজেব্রা (Algebra) নামকরণ ॥

এইবার এ্যালজেব্রা ও তাহার কতকগুলি অপরিচিত নামের ইতিহাস লইয়া কিছু আলোচনা করিয়া দেখা যাক।

"যাহা কিছু রহস্য যাহা কিছু অজ্ঞাত—সকলি জানিবার নিয়ম ; প্রাকৃতিক নিয়মানুসন্ধানের নিয়ম"—এবম্বিধ সকল নাম দিয়া এই বিশেষ বিজ্ঞানের নামকরণের ইতিহাস শুরু হইয়াছিল (Ahmes খৃঃ পূঃ ১৫৫০, এবং পরবর্তীকালে Gosselin ১৫৭৭ ; Seki ১৬৮০)।

গ্রীসে ইহার কোন আলাদা নামকরণ করা হয় নাই। সমগ্র সংখ্যাতত্ত্বকেই গ্রীসিয়রা এ্যারিথ্‌মেটিক তথা পাটিগণিত নামে অভিহিত করিয়াছিলেন। এবং স্বাভাবিক নিয়মেই এ্যালজেব্রাকেও ইহারই মধ্যে অন্তর্ভুক্ত করা হইয়াছিল।

হিন্দু পণ্ডিতদের মধ্যে অবশ্য বিবিধ নামের ব্যবহার লক্ষিত হয়। আর্যভট্ট (৫১০ খৃষ্টাব্দের কাছাকাছি) মহাবীর (৮১০ খৃষ্টাব্দের কাছাকাছি) তাঁহাদের নিজস্ব গ্রন্থ যথাক্রমে "আর্যভট্যম্" এবং "গণিতসার সংগ্রহে" বিশেষ কোন নামকরণ ছাড়াই এ্যালজেব্রাকে অন্তর্ভুক্ত করিয়াছেন। ব্রহ্মগুপ্ত এ্যালজেব্রার নামকরণ করিয়াছিলেন "কূটক"। এবং ভাস্কর (১১৫০ খৃষ্টাব্দের কাছাকাছি) সাধারণভাবে সমগ্র অঙ্কশাস্ত্রের নামকরণ করিয়াছিলেন "বীজগণিত," এ্যালজেব্রাকে বিশেষভাবে চিহ্নিত করিয়াছিলেন "অব্যক্তগণিত" বা "অব্যক্তক্রিয়া" নামে।

চীনদেশে এ্যালজেব্রা সমন্বিত গ্রন্থের নানা প্রকার বিচিত্র নামকরণ দেখা যায়। সহগ (Co-efficient) কে এইখানে গণনা-দণ্ড বলা হইয়াছে। জাপানের বহু বিচিত্র নামের মধ্যে Yendan jutsu অর্থাৎ বিশ্লেষণ প্রথা, Kigen seiho অর্থাৎ গুপ্ত সত্য সন্ধানের নিয়মাবলী প্রভৃতি উল্লেখযোগ্য।

এইখানে লক্ষণীয় এই যে এতাবৎ আমরা যতটুকু কালক্রম অনুসরণ করিয়াছি তাহার মধ্যে যদিও এ্যালজেব্রা নামের পূর্ণ আবির্ভাব ঘটে নাই তবুও আমরা এই নামকে ব্যবহার করিয়াছি সংক্ষেপে গণিত শাস্ত্রের এই বিশেষ শাখাটিকে বুঝাইবার জন্যই।

এ্যালজেব্রা নামের প্রথমতম প্রকাশ দেখিতে পাওয়া যায় আরবদেশের প্রখ্যাত গণিতজ্ঞ আল-খোয়ারিজিমি বিরচিত গ্রন্থের শিরোনামায়—আল্‌-জাবর'ওয়াল মুকাবালাহ্ (Al-jabarw'al mukabalah) ৮২৫ খৃষ্টাব্দে। ইহারই বিভিন্ন অনুবাদের শিরোনামায় নানা প্রকার পরিবর্তনের মধ্য দিয়া অবশেষে আমাদের পরিচিত সংক্ষিপ্ত নাম এ্যালজেব্রার আবির্ভাব ঘটিয়াছিল ষোড়শ শতাব্দীতে।

আল্‌-জাবরও'য়াল মুকাবালাহ্‌র আক্ষরিক অর্থ হইল পুনঃপ্রতিষ্ঠা ও বিভেদ। ১৬০০ খৃষ্টাব্দে বেহা এদীন (Beha Edin) প্রাঞ্জল উদাহরণ দ্বারা ইহার মর্মার্থ বুঝাইয়া দেন :

যে কোন একটি সমীকরণ লইয়া দেখা যাক্ : $bx+2q=x^2+bx-q$ তাহা হইলে আল্ জাবর আনুযায়ী $bx+2q+q=x^2+bx$ এবং আল মুকাবালাহ অনুযায়ী $3q=x^2$

সাধারণ ভাবে বলা যায় আল-জাবর এর মূলগত ভাব হইল ঋণাত্মক সংখ্যার জায়গা বদল এবং মুকাবালাহর হইল মূলতঃ ধনাত্মক সংখ্যার জায়গাবদল এবং সরলীকরণ।

আরবের খ্যাতনামা গণিতবিদ আল খার্খি (Al-Kharkhi) আনুমানিক ১০২০ খৃষ্টাব্দে আল ফখরী (Al-Fakhri) নামে গণিতের পুস্তক প্রণয়ন করিয়াছিলেন। আল-খোয়ারি জিমির মত তাঁহার গ্রন্থও যদি লাতিনে তরজমা হইত তাহা হইলে এ্যালজেব্রা আজকে এ্যালজেব্রা না হইয়া ফখরি হইতে পারিত—অন্ততঃ ইহা হইবার সম্ভাবনা যথেষ্ট পরিমানে যে ছিল তাহা অস্বীকার করিবার কোন উপায় নাই।

বীজগণিতের কয়েকটি প্রতীকচিহ্ন

এখন কয়েকটি প্রতীকচিহ্নের জন্ম-ইতিহাস আলোচনা করা হইবে, কিন্তু এখন হইতে আমরা এ্যালজেব্রাকে বীজগণিত এবং এ্যারিথ্‌মেটিক্ কে পাটীগণিত নামে অভিহিত করিব।

প্রাথমিক পাটীগণিতের প্রায় সকল প্রতীকচিহ্নই বীজগণিত হইতে আসিয়াছে—মূলতঃ মুদ্রণকারের সুবিধার্থে। মাত্র উনবিংশ শতাব্দীতেই পাটীগণিতে প্রতীকচিহ্নের প্রথম বিস্তৃত ব্যবহার দেখা যায়। ইহার পূর্ব্বে পাটীগণিতে প্রতীকের ব্যবহার আদৌ গুরুত্ব লাভ করে নাই। উদাহরণ স্বরূপ দেখা যায় 'হডারের' ১৬৭২ সালে পুনর্মুদ্রিত পুস্তকের ২০ পৃষ্ঠার পরেই মাত্র পরবর্তী মন্তব্যটুকু রহিয়াছে : "স্মরণ থাকে '+' এই চিহ্ন যোগ বুঝায়, এবং দুইটি রেখা সমন্বিত '=' এই চিহ্ন সমতা বা সমীকরণ বুঝায়, কিন্তু '×' এই চিহ্ন গুণন বোঝায়" পুস্তকের অপর কোথাও অন্য কোনো প্রতীকের উল্লেখ পাওয়া যায় না। এমনকি সমতার আধুনিক প্রতীকচিহ্নের উদ্ভাবক 'রেকর্ড'ও কেবলমাত্র তাঁহার বীজগণিতের বই হোয়েট ষ্টোন অফ উইটে (১৫৫৭)-তে এই প্রতীকের ব্যবহার করিয়াছেন, কিন্তু অনুমানিক ১৫৪২ সালে লিখিত পাটীগণিতের বই 'গ্রাউণ্ড অফ আর্টেস' এ ইহার কোন উল্লেখ করেন নাই।

প্রাচীনতম প্রতীকচিহ্ন

প্রাচীনতম প্রতীকচিহ্নগুলি মিশরে উদ্ভাবিত। Ahmes Papyrus (আঃ খৃঃ পূঃ ১৫৫০) এ যোগ বুঝাইতে এবং বিয়োগ বুঝাইতে এই চিহ্নদ্বয়ের ব্যবহার দেখা যায়।

সুনিশ্চিতভাবে জানা না গেলেও ডায়োফ্যাণ্টাস্ (আঃ ২৭৫ খৃঃ) তাঁহার এ্যারিথ্‌মেটিকা-য় সম্ভবতঃ নিম্নলিখিত সূত্রের অবতারণা করেন :

"বিয়োগচিহ্নকে বিয়োগচিহ্ন দ্বারা গুণ করিলে যোগচিহ্ন হয়, এবং বিয়োগচিহ্নকে যোগচিহ্ন দ্বারা ভাগ করিলে বিয়োগচিহ্ন হয়। বিয়োগ বুঝাইতে Ψ (শাই) এই চিহ্নকে উল্টাইয়া লিখিতে হইবে।

খুবই সম্ভব যে ইহা Λ ল্যাম্বডা বা গ্রীক L (যাহা বিয়োগ সূচক গ্রীক শব্দের প্রথমাক্ষরও বটে) এর অপভ্রংশ।

হিন্দুদিগের মধ্যে দ্বাদশ শতাব্দীর পুর্ব্বে প্রতীকচিহ্নের বিশেষ প্রচলন দেখা যায় না, তবে দশম শতাব্দীতে বক্ষালী পাণ্ডুলিপিতে ঋণাত্মক সংখ্যা বুঝাইতে সংখ্যার পার্শ্বে '×' এই চিহ্নের ব্যবহার দেখা যায়। ভাস্করের পাণ্ডুলিপিতে (আঃ ১১৫০ খৃঃ) ঋণাত্মক সংখ্যা বুঝাইতে সংখ্যার মাথায় বিন্দু বা ছোট বৃত্তের ব্যবহার দেখা যায় (যেমন—৬ বুঝাইতে ·৬ বা °৬) আবার কোথাও বা সংখ্যাটি একটি বৃত্তের মধ্যে অবস্থিত অর্থাৎ শূন্য হইতে ৬ কম।

যোগ ও বিয়োগের ইউরোপীয় প্রতীক চিহ্ন

যোগ বুঝাইতে শুরুর দিকে ইওরোপে p P. বা $\bar{p}$ অথবা প্লাস এই সকল প্রতীকের প্রচলন দেখা যায়। কিন্তু বিস্ময়কর ইহাই যে যদিও বিয়োগ বুঝাইতে মাইনাস শব্দের ব্যবহার ১২০২ খৃষ্টাব্দে ফিবনোচ্চি এর পুস্তকে পাওয়া যায় প্লাস শব্দের ব্যবহার পঞ্চদশ শতকের শেষভাগের পুর্বে দেখা যায় না। পঞ্চদশ ও ষষ্ঠদশ শতাব্দীতে (যোগচিহ্ন $\bar{p}$ এর অনুকরণ) বিয়োগ চিহ্ন হিসাবে $\bar{m}$ এর বহুল প্রচলন দেখা যায়।

সাম্প্রদায়িক পক্ষপাতিত্ব

গাণিতিক প্রতীক নির্দ্ধারণে সম্প্রদায়গত রুচির কিছু প্রভাব লক্ষ্য করা যায়। লাতিন সম্প্রদায় সাধারণত ইতালীয় রীতি অনুসরণে যোগ বিয়োগের চিহ্ন হিসাবে $\bar{p}$ এবং $\bar{m}$ ব্যবহার করিত, কিন্তু জার্মানে '+' এবং '−' এই প্রতীকদ্বয়ের উপর কিছু বেশী পক্ষপাতিত্ব লক্ষ্য করা যায়। অবশ্য ইহাদের ব্যবহার পঞ্চদশ শতাব্দীর পুর্বে দেখা যায় না।

আমাদের পরিচিত প্রতীকের উদ্ভব

জার্মানীতে প্রাপ্ত ১৪৫৬ সালের এক পাণ্ডুলিপিতে যোগ বুঝাইতে et এই শব্দের ব্যবহার দেখা যায়; শব্দটি এমন ভঙ্গিমায় লিখিত যে ইহা দেখিতে প্রায় + এই চিহ্নের ন্যায়। (ইংরাজীতে এবং বুঝাইতে যেমন & এই প্রতীকের ব্যবহার আছে)। সুতরাং 'et' এট-এর সংক্ষিপ্ত সংস্করণ হইতেই যোগচিহ্নের উদ্ভব ইহা প্রায় সুনিশ্চিত ভাবেই বলা যায়।

বিয়োগ চিহ্নের উদ্ভব লইয়া অনেক মতভেদের অবকাশ আছে। কাহারও মতে $\bar{m}$ এই প্রতীকের শীর্ষস্থ '−' ওই চিহ্নটুকু টিকিয়া গিয়াছে। কেহ বলেন m এর পরিবর্তে '−' এই প্রতীক ব্যবহারের তৎকালীন অভ্যাস হইতেই বিয়োগ চিহ্নের উদ্ভব। [যেমন Summaর পরিবর্তে Sum̄a. দশ বা হাজার বুঝাইতে X mille এর পরিবর্তে $\bar{X}$ প্রভৃতি]।

Uncial এবং Visigothic-এর লেখায় m এর পরিবর্তে যথাক্রমে ÷ এবং ∸ এই প্রতীকদ্বয়ের ব্যবহার দেখা যায়। ইহা হইতে '−' এই প্রতীক চিহ্ন যে m (minus) এরই ['+' এই চিহ্ন যেমন et শব্দের প্রতীক] এই সিদ্ধান্ত যুক্তিসঙ্গত বলিয়া মনে হয়।

অপর সম্ভাবনা ইহাই যে, ২ গজ −৩ ইঃ প্রভৃতি লিখিতে মধ্যস্থলের অনুপস্থিত সংখ্যার পরিবর্তে '−' এই চিহ্ন ব্যবহারের অভ্যাস হইতেই বিয়োগ চিহ্নের আবির্ভাব।

ছাপার হরপে '+' এবং '−' এই প্রতীকদ্বয়ের প্রথম প্রকাশ ১৪৮৯ খৃষ্টাব্দে উইডম্যান এর পাটীগণিতে। কিন্তু লেখক গণনার কার্যে ইহাদের ব্যবহার করেন নাই। বস্তুতপক্ষে যোগ-বিয়োগের প্রতীকদ্বয় গাণিতিক হিসাবনিকাশে পাটীগণিতের বহুপুর্বে বীজগণিতে ব্যবহৃত হয়।

উইডম্যান লেখেন, "$\frac{২}{৩}$ $\frac{১}{২}$ $\frac{২}{৫}$ যোগ করিলে হয় $\frac{৪}{৩}$ বা ১$\frac{১}{৩}$"।

ডাচ্ গাণিতিক ভোদার হোয়েকেই প্রথম (১৫১৪ খৃঃ) '+' এবং '−' প্রতীকের সহায়তায় বীজগণিতে গণনার সূচনা করেন [যেমন $\sqrt{\frac{৩}{৪}} - \sqrt{\frac{১}{২}}$ বুঝাইতে R$\frac{৩}{৪}$ − R$\frac{১}{২}$ প্রভৃতি]।

পাটীগণিতে গণনার কার্য্যে প্রতীকদ্বয়ের প্রথম প্রয়োগ করেন জর্জ্জ ওয়াকুল ১৫৩৬ খৃষ্টাব্দে।

প্রতীকদ্বয়ের বহুস্থানে প্রভূত প্রচলনের কৃতিত্ব অবশ্য বীজগাণিতিক ষ্টিফেল (পুর্বে ইঁহাকেই প্রতীকদ্বয়ের উদ্ভাবক বলা হইত) এর প্রাপ্য।

ইংল্যাণ্ডে প্রতীকদ্বয়ের স্বীকৃতি :

১৫৪২ খৃষ্টাব্দে 'রেকর্ড' তাঁর পুস্তকে প্রতীকদ্বয়কে পুর্ণ স্বীকৃতি দেন। বেকার (১৫৬৮ খৃঃ) যদিও + চিহ্নের পরিবর্তে '×' এই প্রতীকের প্রচলনের চেষ্টা করেন তবু সাধারণভাবে প্রতীকদ্বয় ইংল্যাণ্ডে গৃহীত হয়।

History of Mathematics—Bell হইতে প্রণতি সরকার অনূদিত।

৩

ত্রিমাত্রিক আয়তন

আকার পরিবর্ত্তন ব্যতিরেকে একটি বস্তুর স্থানান্তরণের যৌক্তিকতা বলিতে কি বুঝায় তাহা আমরা দেখিয়াছি ; যেমন যে কোন দৈর্ঘ্য একটি জায়গার নির্দিষ্ট কোন পরিমাপে খাপ খায়—বা পরিমাপকে স্থান দেয় ; ঠিক সেই দৈর্ঘ্যই, যখন সেই দুটি যে কোন পন্থায় দিক দিয়া অন্য কোন জায়গায় আনীত হোক, ঠিক সেই দৈর্ঘ্যই স্থান দিবে। বর্তমানে আমরা আয়তনের গঠনরূপ পরিবর্তন ব্যতিরেকে বস্তুর স্থানান্তরণের যোগ্যতা বলিতে কি বুঝায় তাহা আলোচনা করিব।

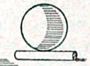
সর্বপ্রথমে বলা যাক, যে বস্তুর আয়তন শুধুমাত্র উহার সীমানির্দ্ধারণকারী তলের উপরই নির্ভর করে, বস্তুর অন্য স্থানের বিন্যাসের উপর কিঞ্চিৎমাত্রও নির্ভর করে না। সেইজন্য আমরা তলের আয়তন বলিতে সর্বদা বস্তুর আয়তনকেই বুঝাইব।

বস্তুর তলের বৈশিষ্ট্য সম্বন্ধে এখন আমরা কয়েকটি কথা বলিতে চাই। ১নং চিত্রে একটি ঘনক, একটি নলক (cylinder) এবং একটি গোলককে দেখান হইল। ঘনকের তল, কিনার (edge) ও কোণক (corner) সহ ছয়টি সামতলিক পার্শ্বদেশের সমবায়। কিন্তু নলকের তল, দুইটি সামতলিক প্রান্তীয় তলের এবং তন্মধ্যবর্তী একটি গোলাকৃতি তলের সমষ্টি। নলকের প্রান্তীয় তলদ্বয় উহার গোলাকার তল হইতে দুইটি চক্রাকার কিনার দ্বারা বিচ্ছিন্ন। গোলকের মসৃণ তল সুষমভাবে মণ্ডলাকার। বস্তুর তলের মসৃণ অংশ, কূল এবং কোণকের মধ্যে আকারগত বিরাট পার্থক্য অত্যন্ত সুস্পষ্ট। কূল বা কিনার তলোপরি অবস্থিত রেখা মাত্র। দ্বিমাত্রিক আয়তন

চিত্র ১

অধিকারের কথা বিবেচনা করিলে বুঝা যায় যে ইহা তলের অংশবিশেষ নহে। সেখানে কোণক অতিমাত্রায় ক্ষুদ্র বিন্দু ছাড়া অন্য কিছু নয়। সুষমতা, (গোলক তলের, নলকের সামতলিক ও গোলাকার তলের এবং ঘনকের সামতলিক তলের সমস্ত বিন্দুর মতো) কিনার সন্নিধান (edge) ও কোনক সামীপ্য (corner) ভেদে তলবিন্দুকে নানা ভাগে বিন্যস্ত করা সম্ভব। প্রয়োগ স্বাচ্ছন্দ্যের জন্য উপরোক্ত বিন্দুগুলিকে আমরা যথাক্রমে, সুষমবিন্দু (smooth point) কিনারবিন্দু (edge point) এবং কোণক বিন্দু (corner point) বলিব। কিনার বিন্দু ও কোণক বিন্দুর সমবায়কে একত্রে বিষম বিন্দু (rough point) বলা যাইতে পারে।

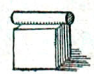
চিত্র ২



চিত্র ৩

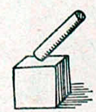
২ নং চিত্রে একটি ঘনকের উপরিতলে একটি গোলককে দেখান হইল। বস্তু দুইটি একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে পরস্পরকে স্পর্শ করিয়াছে, অন্যভাবে, গোলকতলের একটি নির্দিষ্ট বিন্দু ঘনক তলের একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর সহিত মিলিত হইয়া উভয়ে এক অভিন্ন বিন্দুর রূপ পরিগ্রহ করিয়াছে। উপরোক্ত দুই বিন্দুই সুষমবিন্দু। বিন্দুদ্বয়কে বিচ্ছিন্ন না করিয়া ঘনকতলে গোলকের সঞ্চরণ একান্তভাবেই অসম্ভব। এখন যদি আমরা ঘনকের উপরিতলে গোলকটীকে কিয়ৎ-পরিমাণে পরিভ্রমণ করাই তাহা হইলে দেখিব যে গোলকের অন্য এক বিন্দু ঘনকের অপর এক বিন্দুর সংস্পর্শে আসিয়াছে। নলকের একটা সুষম বিন্দুর উপর গোলকটীকে স্থাপন করিলেও ঐ একই সত্যের পুনরাবৃত্তি ঘটিবে। (চিত্র ৩)

এখন যদি আমরা নলকের গোলাকার তলদেশ ঘনকের উপরিতলের উপর সন্নিবিষ্ট করি (চিত্র ৪), তাহা হইলে বস্তুদ্বয় পরস্পরকে সরলরেখায় স্পর্শ করিবে। ঐ রেখার প্রত্যেকটি বিন্দুতে, নলকতলের একটি নির্দিষ্ট বিন্দু, ঘনকতলের একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর সহিত সম্মিলিত হইয়া উভয়ে একই অভিন্ন বিন্দুকে চিহ্নিত করিবে। এখানেও কথিত বিন্দু দুইটি সুষম বিন্দু। পূর্বের মত ইহাও সত্য যে, সংযুক্ত বিন্দুদ্বয়কে বিচ্ছিন্ন না করিয়া এক বস্তুর উপর অপর বস্তুর আপেক্ষিক সঞ্চরণ এখানেও অসম্ভব। নলকটিকে ঘনকের উপরিতলে কিঞ্চিৎ পরিমাণে সঞ্চরণ করান হইলে আমরা দেখিব, নূতন এক সরলরেখায় বস্তু দুইটি পরস্পরকে স্পর্শ করিয়াছে। সমস্ত স্পর্শবিন্দু এক্ষেত্রে পূর্ব হইতে ভিন্ন।



চিত্র ৪

চিত্র ৫



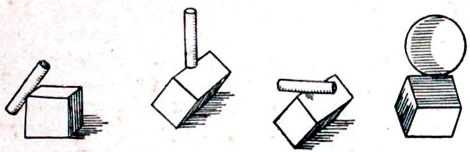
চিত্র ৬

এখন যদি ঘনকের উপরিতলে নলকের সামতলিক প্রান্তীয় তল প্রতিস্থাপিত করান হয় (চিত্র ৫) তাহা হইলে উভয় বস্তুর তলদ্বয় সম্মিলিত হইয়া একক তলে পরিণত হইবে। এখানে তল দুইটি পূর্বের ন্যায় কোন বিন্দু বা সরলরেখায় স্পর্শ না করিয়া একটি সম্পূর্ণ তলে পরস্পরকে স্পর্শ করিবে।

নলকের সামতলিক তলে একটি বিন্দু এবং ঘনকের উপরিতলে এমন একটি বিন্দুর কথা ধরা যাক যাহারা পরস্পরকে স্পর্শ করিয়াছে। উভয় বিন্দু স্পষ্টতঃই সুষম বিন্দু। এখানেও ইহা সহজ সত্য যে, সংযুক্ত বিন্দুদ্বয়কে বিচ্ছিন্ন না করিয়া বস্তুদ্বয়ের যে কোনটির অপরটির উপর সঞ্চরণ সম্পূর্ণরূপে অসম্ভব।

কিন্তু আরও শিক্ষণীয় বেশ কিছু এখনও বলিবার মত আছে।

পূর্বাপর আমরা অনুমান করিয়াছি যে নলকের সামতলিক তল ঘনকের সামতলিক তল অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। এখন নলকটিকে ঘনকতলের মধ্যদেশে দণ্ডায়মান করাইয়া (চিত্র ৫) পরস্পরকে স্পৃষ্ট করান হইলে নলকের বৃত্তীয় তল ঘনকের বর্গীয় তল দ্বারা সম্পূর্ণরূপে আবরিত হইবে। তাহার পর যদি নলকটিকে ঘনকতলে অবনমিত (tilt) করা হয় তাহা হইলে নলক ৬নং চিত্রের রূপ পরিগ্রহণ করিবে। পূর্ব বর্ণিত সুষম বিন্দুদ্বয় এখানে পরস্পরকে স্পর্শ করিয়া নাই। কিন্তু এই স্থানেও অন্য দুই বিন্দু পরস্পরকে স্পর্শ করিয়া আছে। কেননা অবনমিত নলকের বৃত্তীয় কিনারে একটি বিন্দু ঘনক তলোপরি একটি নির্দিষ্ট বিন্দুর উপর ন্যস্ত। নিজ কিনাররেখার উপর নলকটিকে আবর্তিত না করাইয়া একই দিকে নলকটিকে যত কম বা বেশী অবনমিত করি না কেন: উপরোক্ত বিন্দুদ্বয় পরস্পরকে স্পর্শ করিয়াই অবস্থান করিবে। সুতরাং আমরা বলিতে পারি যে, কিনারবিন্দু যখন সুষমবিন্দুকে স্পর্শ করে তখন সংযুক্ত বিন্দুদ্বয়কে বিচ্ছিন্ন না করিয়া বস্তুদ্বয়ের যে কোনটির অপরটির উপর আপেক্ষিক সঞ্চরণ সম্ভব। ঘনক কিনাররেখার বিপরীতে নলকের সামতলিক বা গোলাকার তলের (চিত্র ৭, ক, খ) কিম্বা, ঘনক কিনাররেখার বা নলক কিনাররেখার বিপরীতে গোলকতলের কথা বিবেচনা করিলে ঐ একই সত্যের প্রতীতি জন্মিবে।



(ক) (খ) (গ) (ঘ)

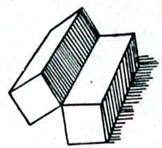
চিত্র ৭

বস্তুদ্বয়ের মধ্যে একটিকে দৃঢ়রূপে সংবদ্ধ করিয়া একই বিন্দুদ্বয়ের স্পর্শ অব্যাহত রাখিয়া, অপরটিকে আমরা সঞ্চরণ করাইতে পারি। কিন্তু এইরূপ করিবার সময় একই দিকে বস্তুটির অবনমন অবশ্য প্রয়োজনীয়।

যদি ঘনকের একটি কোণককে নলকের একটি সুষম বিন্দুর সহিত স্পৃষ্ট করান হয় (যেমন ৮ নং চিত্র) তাহা হইলে যে বিন্দুদ্বয় পরস্পরকে স্পর্শ করিবে। তাহাদের উপর বস্তুটির

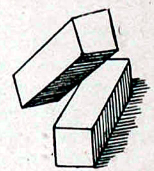
চিত্র ৮

অবনমনের দিক সম্বন্ধে কোনো বিধি নিষেধ আরোপিত হয় না। ঘনকটীকে যে কোনোদিকে অবনমিত করি না কেন সর্বক্ষেত্রেই ইহার কোণক নলকের সুষম বিন্দুকে স্পর্শ করিয়া থাকিবে।



চিত্র ৯

[কিনাররেখার সহিত কিনাররেখার একমুখীন স্পর্শন = একমাত্রিক স্বাধীনতা]



চিত্র ১০

[কিনাররেখার সহিত কিনাররেখার ভিন্নমুখীন স্পর্শন = দ্বিমাত্রিক স্বাধীনতা]

এখন যদি আমরা দুইটী কিনারবিন্দুকে পরস্পর সংযুক্ত করি তাহা হইলে স্পর্শবিন্দুতে বস্তুদ্বয়ের একমুখীনতা (চিত্র ৯) এবং ভিন্নমুখীনতা (চিত্র ১০) ভেদে পার্থক্যের সৃষ্টি হয়। পূর্ববর্তী অবস্থায় একটী নির্দিষ্ট দিকে অবনমন ঘটাইয়া একই বিন্দুদ্বয়ের পারস্পরিক স্পর্শন সম্ভব। সেই জন্য কোণক সহ কিনারবিন্দুর স্পর্শনে অবনমনের দিক সম্বন্ধে কোনো বিধিনিষেধ থাকে না। কোণক সহ কোণকের স্পর্শনে ঐ একই কথা আরও বেশীভাবে বলা যায়।

সারমর্ম এই যে,—নির্দিষ্ট ধারণায় সকল তলই সুষম বিন্দুগুলিতে সম গঠন-বৈশিষ্ট্য-সম্পন্ন, কেননা যখন দুই সুষম বিন্দু পরস্পরকে স্পর্শ করে, তখন তলদ্বয় একে অপরের সহিত এত যোগ্যভাবে যুক্ত হয় যে সংযুক্ত বিন্দুদ্বয়কে বিচ্ছিন্ন না করিয়া বস্তু দুইটীর একটীর অপরটীর উপর আপেক্ষিক সঞ্চরণ অসম্ভব।

দুই কিনাররেখারও ঐরূপ যোগ্য সংযুক্তি সম্ভব। বস্তুদ্বয়ের যোগ্য সংযুক্তি বলিতে আমরা এই বুঝি যে স্পৃষ্ট বিন্দুদ্বয়কে বিচ্ছিন্ন না করিয়া উভয় বস্তুর মধ্যে যে কোন একটীর সঞ্চরণ অসম্ভব। এইজন্য অবশ্য বস্তুদ্বয়ের একটীর পৃষ্ঠদেশ উৎকীর্ণ (re-entrant) করা প্রয়োজন (চিত্র ১১)। সুতরাং ইহা এখানে সঙ্গতভাবে বলা যাইতে পারে যে এইভাবে যে বিন্দুতে তলদ্বয়ের যোগ্য সংযুক্তি ঘটে সে বিন্দুতে তলদ্বয় সমগঠন বৈশিষ্ট্য সম্পন্ন। ১১নং চিত্রে ঘনকটী যে বস্তুটীর সংস্পর্শে আছে সেই বস্তুটী,—উভয়ের অংশ বিশেষ কর্তিত এমন দুইটী গোলকের সমবায়।

চিত্র ১১

যদি গোলক দুইটীর অত্যন্ত ক্ষুদ্র অংশ কর্তিত হয় তাহা হইলে গঠিত বস্তুটীর উৎকীর্ণ কিনার অত্যন্ত তীক্ষ্ণ হইবে এবং তখন ঘনকের কিনারের সহিত ইহার স্পর্শন অসম্ভব হইয়া পড়িবে। (চিত্র ১২) আবার যদি প্রত্যেক বৃত্তের প্রায় অর্ধ অংশ কর্তন করা হয় তাহা হইলে উৎকীর্ণ কিনার প্রশস্ত হইয়া পড়িবে এবং ঘনকটীকে ঐ স্থানে স্থাপন করিলে উহা দুলিতে আরম্ভ করিবে (চিত্র ১৩) স্পষ্টতঃই মধ্যবর্তী এমন এক অবস্থা বর্তমান যখন বস্তুর কিনারের সহিত

চিত্র ১২

চিত্র ১৩

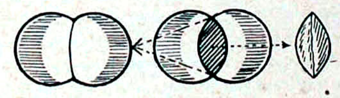
চিত্র ১৪

ঘনক কিনারের, দোলন ব্যতীত যোগ্য সংযুক্তি সম্ভব। (চিত্র ১৪) এখানে যদিও একটি

বস্তুর কিনার উদ্গত এবং অপরটির অবনত তবুও কিনাররেখায় উভয় তলই সমগঠন বৈশিষ্ট্য সম্পন্ন। যদি আমরা অনুমান করি উল্লিখিত যুগ্ম গোলকটি (twin sphere) কাষ্ঠ নির্মিত তাহা হইলে বস্তুতল শুধুমাত্র কাষ্ঠতলই নয়, পরিবেষ্টনকারী বায়ুমণ্ডলের তলও বটে। অধিকন্তু কাষ্ঠতলে যাহা অবনমন, বায়ুতলে তাহাই উদ্গমন। ঠিক একই ভাবে ঘনকের প্রত্যেকটি উদ্গত কিনার এবং কিনার একই সময়ে বায়ুতলের অবনমনের সৃষ্টি করে। তল যতখানি এক বস্তু-সাপেক্ষ ঠিক ততখানি অপর বস্তু-সাপেক্ষ এবং বস্তুর অন্তরবস্থা এবং বহিরবস্থা নিরপেক্ষ। তলের উদ্গমন অবনমন এবং বিধিবহির্ভূত পরিভাষা। একটি পাতলা বুটিদার ধাতুখণ্ডে এক পক্ষের উদ্গমন অপর পক্ষের অবনমন এবং অপর পক্ষের উদ্গমন পরপক্ষের অবনমন ছাড়া অন্য কিছু নয়। যে কোনোটিকে সত্য বলিয়া মানিয়া লওয়া ইচ্ছার উপর নির্ভর করে। (এখানে পাতলা ধাতুখণ্ড বলিতে ধাতু তল বোঝান হয় নাই। ইহা এক পাতলা ঘন বস্তু মাত্র যাহার দুই তল পরস্পর অনুরূপ।)

এইরূপে দেখা যাইতেছে যে উপরোক্ত ঘনক কিনারে গঠন ভঙ্গিমা যুগ্ম গোলকের গর্তের বায়ুকিনারে প্রতিসম। অর্থাৎ কিনাররেখায় তলদ্বয় সমগঠন সম্পন্ন।

এই সকল ক্ষেত্রে যুগ্মগোলকের উপমা খুবই সুবিধাজনক, কেননা কর্তন-ক্রমের বিভিন্নতা ঘটাইয়া যে কোনো আকারের কিনাররেখা সৃষ্টি করা সম্ভব। এখানে আমরা অনুমান করিয়াছি যে কর্তিত অংশগুলি অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। কর্তিত ক্ষুদ্রতর অংশকে সংযুক্ত করিলে আমরা ১৫নং চিত্র তিনটির দক্ষিণ দিকের চিত্রের মতো উদ্গত কিনাররেখা মণ্ডিত একটি বস্তু পাই।



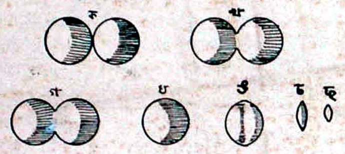
চিত্র ১৫

বস্তুদ্বয়ের একটি বৃহত্তর অংশ সম্মিলনে গঠিত ও অবনত কিনাররেখা মণ্ডিত। পূর্বের মতো এখানেও উভয় বস্তুর কিনাররেখা সমগঠন সম্পন্ন।

ধরা হউক দুইটি গোলককে প্রায় অর্দ্ধভাগে কর্তন করা হইল (অবশ্য উভয় গোলককে একই ভাবে ভাগ করিতে হইবে, নতুবা সামতলিক তলগুলির যোগ্য সংযুক্তি ঘটিবে না।) এবং তাহার পরে বৃহত্তর অংশদ্বয় এবং ক্ষুদ্রতর অংশদ্বয় সংযুক্ত করা হইল। এখন এমন দুইটি ঘন বস্তুর সৃষ্টি হইল যাহাদের কিনাররেখা অত্যন্ত প্রশস্ত এবং উন্মুক্ত; উদ্গত কিনাররেখা কিঞ্চিৎ শিরাল এবং উৎকীর্ণ কিনাররেখা কিঞ্চিৎ অবনত। গোলকদ্বয়কে ঠিক সমভাবে কর্তন করা হইলে নব-বস্তু

পুনরায় একটি গোলকেই পরিণত হইবে এবং গোলোকোপরি কোন শিরা বা অবনতি থাকিবে না। তলগুলিও সর্বতোভাবে সুষম হইবে।

উদ্গাত কূলরেখার ক্রম প্রসারণতার ফলে শিরা অদৃশ্য হয় এবং উৎকীর্ণ (re-entrant) কিনাররেখার ক্রমসম্প্রসারণতার ফলে অবনতি অদৃশ্য হয়—এই ধারণাই উপরোক্ত বোধের সৃষ্টি করে। অথবা আমরা অনুমান করিতে পারি যে উদ্গাত (projecting) কিনাররেখা



চিত্র ১৬

ক্রমপ্রসারণতার মধ্য দিয়া সুষম রূপ পরিগ্রহ করে এবং তার পর উৎকীর্ণ কিনাররেখার সৃষ্টি করে। ১৬ নং নকশার চিত্রগুলিকে যদি একটি চক্রে অনুক্রমে সংস্থাপিত করিয়া আমরা চক্রটিকে দ্রুত গতিতে আবর্তিত করাই তাহা হইলে প্রণালীটি অমাদের গোচরীভূত হইবে। প্রথমে গোলকদ্বয় বিচ্ছিন্ন, পরে অভিন্ন (খ, গ) তদনন্তর একক গোলকের (ঘ) পরিশেষে ক্ষুদ্র হইতে ক্ষুদ্রতর উত্তল কাচের আকারে সঙ্কুচিত হইবে (ঙ, চ, ছ)। ইহা সত্যই এক গুরুত্বপুর্ণ ব্যাপার যে ঘ নং চিত্রের একমাত্র গোলকটি উপরোক্ত প্রণালীটির এক অবস্থা। অথবা ইহা বলা যাইতে পারে যে উদ্গাত কিনার এবং উৎকীর্ণ কিনারের মধ্যে উপবিষ্ট কিনার বিন্দুই বিশেষ ক্ষেত্রে সুষম বিন্দু। কিনারবিন্দুর এই অবস্থা স্বাতন্ত্র্য আছে বলিয়াই সমস্ত সুষম বিন্দুতে তলগুলি সমগঠন বৈশিষ্ট্য সম্পন্ন।

The common sense of the exact sciences by William Kingdon Clifford হইতে

শংকর প্রসাদ হাজরা অনূদিত।

আর্কিমিডিসের পাটীগণিত

'বৃত্ত পরিমাপ' (Measurement of a circle) এবং 'বালুকা গণনা' (Sand reckoner) গ্রন্থ দুইটির অধিকাংশেই পাটীগণিত সম্বন্ধে আলোচনা বর্তমান। দ্বিতীয়টি সম্বন্ধে এখানে কিছু বলা অনাবশ্যক, কারণ যে কোন মানগুণ্য যুক্ত সংখ্যা প্রকাশের নিমিত্ত পুস্তকটিতে যে পন্থা অবলম্বন করা হইয়াছে, তাহা অপেক্ষা উৎকৃষ্টতর কোন পন্থা নির্দেশ করা সম্ভব নহে। কিন্তু 'বৃত্ত পরিমাপ' গ্রন্থটিতে বৃহৎ বৃহৎ সংখ্যা ব্যবহার করিয়া নানা প্রক্রিয়ায় সম্পাদিত হইয়াছে। গ্রীক পদ্ধতিতে সংখ্যাপাতন প্রকাশ করা সম্ভব, এরূপ সংখ্যাগুলির সাহায্যেই আর্কিমিডিস গুণন, বর্গমূল ইত্যাদি বিভিন্ন পাটীগাণিতিক বিষয়ের উত্তর নির্ণয় করিয়াছেন সত্য, কিন্তু নির্ণয়ের পদ্ধতি সম্বন্ধে কোনই উল্লেখ করেন নাই। বিভিন্ন আকর্ষণীয় প্রশ্ন পুস্তকটিতে আছে। পাঠকদের সুবিধার্থে প্রথমে গ্রীক পদ্ধতির সংখ্যাতত্ত্ব এবং বিভিন্ন প্রক্রিয়ায় গ্রীক গণিতজ্ঞরা যে সব গাণিতিক প্রশ্নের সমাধান করিতেন (যাহাকে বলা হয় the art of calculating) তাহা আলোচিত হইবে; কারণ ইহার ফলে নিম্নলিখিত দুইটি জিজ্ঞাসার ব্যখ্যা দেওয়া সহজ হইবে :—

(১) বৃহৎ সংখ্যার আনুমানিক বর্গমূল নির্ণয়ে আর্কিমিডিসের নিজস্ব পদ্ধতি।

(২) $\sqrt{৩}$ এর দুইটি আনুমানিক মান নির্ণয়ে আর্কিমিডিসের গণনা প্রণালী (যাহা আর্কিমিডিস নানাস্থানে ব্যবহার করিলেও কিরূপে তাহা নির্ণিত হইল, তাহার কোন আভাস নাই।)

গ্রীক সংখ্যা পদ্ধতি :

ইহা সুনিশ্চিত যে গ্রীকরা ১ হইতে ৯৯৯ পর্যন্ত সমস্ত সংখ্যা বর্ণাক্ষরের দ্বারা প্রকাশ করিতেন। পরে আরও তিনটি সংকেতের সাহায্য গ্রহণ করা হয়। ইহা ব্যতীত, প্রতি অক্ষরের উপর একটি ক্ষুদ্র আনুভূমিক রেখা স্বরাঘাত (accent) রূপে ব্যবহৃত হইত যেমন $\bar{a}$।

পদ্ধতিটি নিম্নরূপ :—

α', β', γ'; δ', ϵ', ϛ', ζ', η', θ', যথাক্রমে ১, ২, ৩, ৪, ৫, ৬, ৭, ৮, ৯।

ι', κ', λ', μ', ν', ξ', o', π', ϙ' যথাক্রমে ১০, ২০, ৩০,.. ....৯০।

ρ', σ', τ', υ', ϕ', χ', ψ', ω', ϡ' যথাক্রমে ১০০, ২০০, ৩০০......৯০০।

অন্তবর্তী সংখ্যাগুলি পাশাপাশি রাখিয়া প্রকাশিত হইত। বৃহত্তম সংখ্যাটি বামপ্রান্তে রাখিয়া পরবর্তী সংখ্যাগুলি মান অনুযায়ী ক্রমান্বয়ে সজ্জিত করা হইত। যেমন, ১৫৩ সংখ্যাটি লেখা হইত $\rho\nu\gamma'$ অথবা $\overline{\rho\nu\gamma}$ ($\rho=$১০০, $\nu-$৫০, $\gamma'=$৩; স্বরাঘাত দ্বারা যোগ প্রক্রিয়া বোঝানো হইত)। শূণ্য সংখ্যাটি প্রকাশের কোন সংকেত ছিল না। সুতরাং, ৭৮০ লিখিতে $\psi\pi'$ এবং ৩০৬ লিখিতে τϛ' লিখিতে হইত।

বৃহৎ সংখ্যাক্রমের ক্ষেত্রে সহস্রকে একক ধরা হইত এবং ১০০০, ২০০০ হইতে ৯০০০ পর্যন্ত সংখ্যাগুলি প্রথম নয়টি আদি সংখ্যা (Natural number) প্রকাশে ব্যবহৃত অক্ষরগুলি দ্বারা পৃথকভাবে প্রকাশ করা হইত ; মাত্র সারির (line) সম্মুখে এবং নিম্নে একটি ক্ষুদ্র ড্যাস (Dash) ব্যবহৃত হইত। যেমন, $,\delta' = 4,000$ এবং পূর্বের ন্যায় পাশাপাশি অক্ষর সজ্জিত করিয়া অন্তর্বর্তী সংখ্যাগুলি প্রকাশ করা হইত। যেমন, ১৮২৩ সংখ্যাটি, $,\alpha\omega\kappa\gamma'$ ' বা $,\alpha\omega\kappa\gamma$, —এইভাবে লেখা হইত। অনুরূপে, ১০০৭ $= ,\alpha\zeta'$। অন্তর্বর্তী অন্যান্য সংখ্যার ক্ষেত্রেও একই নিয়ম অনুসৃত হইত। ৯৯৯৯র পরে অযুত (Myriad) সংখ্যা, এবং ১০,০০০ ও উহারও উর্দ্ধসংখ্যাগুলি প্রকাশের ক্ষেত্রে সাধারণ সংখ্যাগুলিকেই উপযুক্ত নাম প্রদান করিয়া ব্যবহার করা হইত। অযুত (Myriad) সংখ্যাটির পরিবর্তে বিভিন্ন সংক্ষিপ্ত সংকেত ব্যবহৃত হইত। তবে সাধারণতঃ M বা Mυ ব্যবহৃত হইত এবং ইহা ব্যবহৃত হইলে অযুত বা তদূর্দ্ধ সংখ্যাগুলি অর্থাৎ ১০,০০০-এর গুণিতকগুলি সাধারণতঃ এই সংক্ষিপ্ত সংকেতের উপরে লেখা হইত (কয়েকটি ক্ষেত্রে আবার Mএর আগে বা পরেও ব্যবহৃত হইত)। যেমন, ৩৪২,৪৫০ $= \overset{\lambda\delta}{\mathrm{M}},\theta\upsilon\nu'$।

ডায়োফ্যান্টাস (Diophantus) সহস্রের আগে অযুত বা তদূর্দ্ধ সংখ্যাগুলি প্রকাশের জন্য একক সংখ্যা প্রকাশের সাধারণ চিহ্নগুলিই ব্যবহার করিতেন ; সহস্র সূচক অক্ষরগুলি হইতে অযুত সূচক অক্ষরগুলি তিনি একটি বিন্দু দ্বারা পৃথক করিতেন। সেইজন্য, তাঁহার প্রণালী অনুসারে, ৩,০৬২,০০০ হইল $\overline{\tau\varsigma.,\theta}$ বা ৩৩১,৭৭৬ হইল $\overline{\lambda\gamma.\ ,\alpha\psi o\varsigma}$

কোন কোন ক্ষেত্রে অযুত বা তদূর্দ্ধ সংখ্যাগুলি সাধারণ অক্ষরগুলির উপরে দুইটি বিন্দু সন্নিবেশিত করিয়া প্রকাশ করা হইত। যেমন,

$$\ddot{\rho} = \text{১০০ অযুত (১,০০০,০০০)}$$

অযুত সংখ্যক অযুত (myriads of myriads) অর্থাৎ একশত কোটী বুঝাইবার জন্য দুইজোড়া বিন্দু ব্যবহার করা হইত। যেমন, $\ddot{\iota}$ ১০ অযুত-অযুত (myriad-myriads) = ১,০০০,০০০,০০০

ভগ্নাংশ ($\lambda\epsilon\pi\tau\alpha'$) বিভিন্ন উপায়ে প্রকাশ করা হইত। সাধারণ সংখ্যাসূচক অক্ষরের উপর দুইটি স্বরাঘাতচিহ্ন ব্যবহার করিয়া ভগ্নাংশের হর (denominator) টি প্রকাশ করাই প্রচলিত রীতি ছিল। লবটি ১ হইলে ০ একটি মাত্র অক্ষরের সংকেতেই ভগ্নাংশ প্রকাশ করা হইত ; সেক্ষেত্রে লব প্রকাশের কোন প্রয়োজন ছিল না। যেমন, $\frac{১}{৩} - \gamma''$ অনুরূপে, $\frac{১}{৬} - \varsigma''$ বা $\frac{১}{১৫} - \iota\epsilon''$।

এই প্রণালীতে সাধারণ ভগ্নাংশগুলি প্রকাশ করা হইত। কিন্তু যেক্ষেত্রে লবটি ১ না হইয়া অন্য সংখ্যা হইত, সেক্ষেত্রে সাধারণ সংখ্যা প্রকাশের প্রচলিত রীতিই অনুসৃত হইত। এইরূপে, $\frac{৯}{১১} = \theta'\iota\alpha''$ বা $\frac{১০}{৭১} - \iota'o\alpha''$

হেরণ (Heron) তাঁহার 'জ্যামিতি' গ্রন্থে অন্য উপায়ে শেষোক্ত ভগ্নাংশগুলি প্রকাশ করেন। তিনি এক্ষেত্রে হরটি দুইবার লিখিতেন। এইরূপে তাঁহার প্রণালী অনুসারে $\frac{২}{৫} = \beta'\epsilon''\epsilon''$ বা $\frac{২৩}{৩৩} = \kappa\gamma'\lambda\gamma''\lambda\gamma''$।

আর্কিমিডিস, ডায়োফ্যান্টাস বা ইটোসিয়াস (Eutocius) $\frac{১}{২}$ প্রকাশের জন্য $\angle''$ চিহ্নটি ব্যবহার করিতেন ; হেরণ (বা S-এর অনুরূপ চিহ্নদ্বয়ের যে কোনটি ব্যবহার করিতেন।

ভগ্নাংশ প্রকাশের অপর একটি জনপ্রিয় রীতি প্রচলিত ছিল। লবটি ১ এর অধিক হইলে উহাকে কয়েকটি খণ্ড ভগ্নাংশে (Component fraction) বিভক্ত করা হইত ; এই খণ্ডগুলির লব ১ করা হইত এবং উহাদের যোগফল আসল ভগ্নাংশটির সমান হইত। এক্ষেত্রেও পাশাপাশি সন্নিবেশ যোগ প্রক্রিয়া নির্দেশ করিত। যেমন, $\frac{৩}{৪} = \frac{১}{২} + \frac{১}{৪} \longrightarrow \angle''\ \delta''$ $\frac{১৫}{১৬} = \frac{১}{২} + \frac{১}{৪} + \frac{১}{৮} + \frac{১}{১৬} \longrightarrow ($ $\delta''\eta''\iota\varsigma''$

[এক্ষেত্রে $\frac{১}{২}$ হেরণের প্রণালীতে প্রকাশিত]

ইটোসিয়াসের রচনায় পাই, $\angle''\xi\delta''$ অর্থাৎ $\frac{১}{২} + \frac{১}{৬৪}$ বা $\frac{৩৩}{৬৪}$। এই ভাবে এই প্রণালীতে ভগ্নাংশ প্রকাশ করা হইত। অনেক ক্ষেত্রে আবার একই ভগ্নাংশ প্রকাশ করিতে বিভিন্ন খণ্ড ভগ্নাংশে উহাকে বিভক্ত করা যাইত এবং তাহার ফলে একই ভগ্নাংশের প্রকাশ বিভিন্ন হইত।

যেমন, হেরণ $\frac{১৬৩}{২২৪}$ প্রকাশ করিতে বিভিন্ন খণ্ড ভগ্নাংশের সাহায্য গ্রহণ করেন

(ক) $\frac{১}{২} + \frac{১}{৭} + \frac{১}{১৪} + \frac{১}{১১২} + \frac{১}{২২৪}$

(খ) $\frac{১}{২} + \frac{১}{৬} + \frac{১}{৩২} + \frac{১}{৪৮} + \frac{১}{১১২}$

এবং (গ) $\frac{১}{২} + \frac{১}{৬} + \frac{১}{২১} + \frac{১}{১১২} + \frac{১}{২২৪}$

বর্তমান রীতির ঠিক বিপরীত একটি সাধারণ রীতি গ্রহণ করিয়া ডায়োফ্যান্টাস ভগ্নাংশ প্রকাশ করিতেন। তিনি লবের উপরে হরটি লিখিতেন ; যেমন,

$$\frac{\gamma}{\epsilon} = \text{৫/৩ বা } \frac{\kappa\epsilon}{\kappa\alpha} = \text{২১/২৫ অথবা } \frac{\alpha.\omega\iota\varsigma}{\rho\kappa\zeta.\phi\xi\eta} = \text{১,২৭০,৫৬৮/১০,৮১৬।}$$

ষাটের ভগ্নাংশ (Sexagesimal Fraction)

যে সকল পাটীগাণিতিক প্রক্রিয়ার সাহায্য আমরা এখনও গ্রহণ করি, এই পদ্ধতি তাহারই উদাহরণ বলিয়াই ইহার উল্লেখ প্রয়োজন। ইহা ব্যতীত, ইহা বর্তমান দশমিক প্রথার অনুরূপ ; কেবল এই পদ্ধতিতে ১০ এর স্থলে ৬০ কে উপগুণিতক (Sub-multiple) রূপে ব্যবহার করা হয়। গ্রীকরা জ্যোতির্বিদ্যা গণনায় ষাটের পদ্ধতি ব্যবহার করিতেন এবং টলেমীর (Ptolemy) রচনায় ইহা পূর্ণ বিকশিত রূপে প্রতিভাত হয়। একটি বৃত্তের পরিধিকে এবং ইহাদ্বারা কেন্দ্রে যে চারিটি সমকোণ উৎপন্ন হয়, তাহাদিগকে ৩৬০ ভাগে বিভক্ত করা হয়। প্রতি ভাগকে এক ডিগ্রী বলা হয়। ডিগ্রীর ৬০ ভাগের এক ভাগকে ১ মিনিট এবং প্রতি মিনিটের $\frac{১}{৬০}$ অংশকে ১ সেকেণ্ড বলা হয়। বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধকেও অনুরূপে ৬০ ভাগে বিভক্ত করা হয় এবং বিভক্ত প্রতিটি অংশকেও আবার ৬০ ভাগে ভাগ করা হয় এবং অনুরূপভাবে এই প্রক্রিয়া ক্রমান্বয়ে চলে। এইরূপে সাধারণ পাটীগাণিতিক গণনার অনুকূল একটি ভগ্নাংশ পদ্ধতি

পাওয়া যায়। ইহা দ্বারা উপযুক্ত একক নির্বাচনের সাহায্যে যে কোন ক্ষুদ্র সংখ্যা, যতই ক্ষুদ্র হউক না কেন, প্রকাশ করা সম্ভব। তাই টলেমীর নিম্নোক্ত উক্তি বিস্ময়কর নয়: "সাধারণ ভগ্নাংশ ব্যবহারে অসুবিধার জন্য আমরা সাধারণতঃ সংখ্যাতত্ত্বের ক্ষেত্রে ষাটের পদ্ধতি ব্যবহার করিব।" কারণ ৬০ দ্বারা ক্রমাগত বিভাজনের সাহায্যে সমস্ত সংখ্যাগুলির একটি নির্দিষ্ট শ্রেণী-বিভাগ সম্ভব এবং যে কোন ভগ্নাংশের এই শ্রেণীর মধ্যে স্থান নির্দেশ সম্ভব। উল্লেখযোগ্য যে আধুনিক দশমিক প্রথার মত ষাটের পদ্ধতিতেও যোগ ও বিয়োগ প্রক্রিয়া সহজেই সম্পাদন করা যায়। দশমিক প্রথার সহিত ইহার প্রভেদ এইমাত্র যে ষাটের পদ্ধতিতে কোন শ্রেণীর ৬০টি অংশ উহার পরবর্তী বৃহৎ ক্রমের একটি এককের সমান। পরিধির মান প্রকাশ করিবার জন্য সংখ্যাটির সহিত ডিগ্রী বা $\mathring{\mu}$ সংকেতটি সাধারণতঃ ব্যবহার করা হইত; সংখ্যাটির মান প্রকাশকারী অক্ষরটির উপর একটি ছোট আনুভূমিক রেখা থাকিত। সংখ্যাটির শীর্ষে একটি বা দুইটি স্বরাঘাত (accent) দ্বারা যথাক্রমে মিনিট ও সেকেণ্ডের মান প্রকাশ করা হইত। যেমন, $\mathring{\mu}\beta = 2^\circ$ অথবা, $\mu o\iota o\omega\nu\mu\xi\mu\beta'\mu'' =$ ৪৭°৪২′৪০″. আবার, কোন শ্রেণীতে যদি কোন মান না থাকিত, তাহা হইলে উপযুক্ত শ্রেণী সংকেত দ্বারা চিহ্নিত O সংকেতটি ব্যবহৃত হইত। যেমন, $\bar{o}\alpha'\beta''o''' =$ ০°১′২″০‴।

ব্যাসার্দ্ধের ক্ষেত্রেও একই প্রণালী অনুসৃত হইত।

The works of Archimedes with the method of Archimedes, Edited by T.L. Heath হইতে অসীম চট্টোপাধ্যায় অনূদিত।

দশমিকের রহস্য

সাধারণত ভগ্নাংশকে যখন দশমিকে পরিবর্তন করিতে হয় তখন সত্যই বড় পীড়াদায়ক একঘেয়ে কাজ বলিয়া শিক্ষার্থীদের বোধ হয়, খুব কমই শিক্ষার্থী আছে যাহাদের কাছে এই ভাগ করার কাজটি তেমন আনন্দদায়ক হইয়া দেখা দেয়, যদি না, এই সূত্রে, তাহাদের মনকে অন্য কয়েকটি উদ্দীপনাদায়ী জিনিষ দেওয়া যায়। এখন তেমন ধরণের উদ্দীপনাদায়ী বিষয় লইয়া আমরা আলোচনা করিব। এই আলোচনায়, নির্দ্বিধায় স্বীকার করিয়া লইতে হইবে যে, যে ভগ্নাংশ আমরা ব্যবহার করি, সেগুলি তাহাদের সর্বনিম্ন ডাকের।

যখন ভগ্নাংশকে দশমিকে পরিণত করা হয়, তখন দেখা যায় কখনও ভাগ করা শেষ হয় আবার কখনও দেখা যায় ভাগ করা শেষই হইতে চাহে না—এবং ক্রমাগত ভাগ করা চলিতে পারে—উদাহরণ স্বরূপ—

$$\frac{১}{৪} = ·২৫, \quad \frac{১}{২০} = ·০৫, \quad \frac{১}{৩} = ·৩৩৩\cdots$$

প্রথম দুইটির ক্ষেত্রে ভাগ-করা শেষ কিন্তু তৃতীয়টির ব্যাপারে তাহা ঘটিতে পারে না, যতই কেন না ভাগ করা যাক, কখনই মিল হইবার নহে। একথা আমরা সকলেই জানি যে হর যখন ১০, কিম্বা ১০০ কিম্বা ১০০০ এর গুণনীয়ক তখন কোনই ভাগশেষ থাকিবে না, কিন্তু প্রায় প্রত্যেকটি অন্য ক্ষেত্রে সকল সময়ই ভাগশেষ থাকে। ইহার সোজা অর্থ এই যে, হর যখন ২ কিম্বা ৫ ব্যতীত গুণনীয়ক হিসাবে অন্য কোন মৌলিক সংখ্যার দ্বারা গঠিত না হয়, ভাগ করা তখনই একমাত্র শেষ হয়।

$$\frac{১}{২^৩ \times ৫^২} = \frac{৫}{২^৩ \times ৫^৩} = \frac{৫}{১০^৩} = \frac{৫}{১০০০} = ·০০৫$$

ইহা দেখা গেল, হর যদি ২ এবং ৫ এর গুণফল হয়, তখন ৫ কিম্বা ২ এর কোন ঘাত দ্বারা লব ও হর কে গুণ করিয়া, তাহাকে ১০ এর ঘাত সকলে পরিণত করা যায়। ইহাই একমাত্র ব্যাপার যেখানে ভগ্নাংশকে সঠিক সংখ্যক রাশি (*digits*) যুক্ত দশমিকে প্রকাশ করা যায়। আর অন্যান্য সকল ক্ষেত্রে, অর্থাৎ যখন হর তে এমন গুণনীয়ক থাকে যাহা ২ অথবা ৫ দ্বারা বিভাজ্য নহে, তখন ভাগ করা চলিতেই থাকিবে, মিলে পৌছান যাইবে না। প্রথমে এই ভাগ করা ব্যাপারটা খুবই বিরক্তিজনক হইয়া দেখা দেয়, কিন্তু ক্রমে খানিক পরে একই সংখ্যার পুনঃ পুনঃ আবির্ভাব ঘটিতে থাকে; সেই ধরণের প্রত্যেকটি ভগ্নাংশকে আবৃত বা পৌনঃপুনিক দশমিক বলা হয়। লুইস কারঅল একদা বলিয়াছেন—অঙ্ক বিভাগের একটি ম্যাজিক লণ্ঠন থাকা নিশ্চিত যাহার দ্বারা বৃত্ত পরিক্রমণ অবস্থায় আবৃত্ত দশমিক প্রদর্শন করা যায়। আমরা এখন কেমন ভাবে এই সকল দশমিক বৃত্ত পরিক্রমণ করে তাহা দেখাইব।

আবৃত্ত দশমিকে যে সকল অনবরত দেখা দেয় তাহাকে দশমিকের পর্যাবৃত্ত (Period) বলা

হয়। ১/৩ এ পর্যাবৃত্ত ৩; ১/২৭ পর্যাবৃত্ত ·০৩৭। এই সকল পর্যাবৃত্তর মাথায় সাধারণত একটি রেখা টানিয়া উহা বিশেষ রূপে বুঝান হয়। যথা, ১/৩ = ·৩৩৩··· = $\overline{·৩}$, ১/২৭ = ·০৩৭০৩৭··· = $\overline{·০৩৭}$। এখন আমরা প্রশ্ন তুলিতে পারি এই ধরণের ভগ্নাংশ ব্যাপারে কিছু সময় পরেই কেন একই সংখ্যা দেখা দেয়, ইহার একমাত্র ঠিক উত্তর এই যে তাহা ছাড়া তাহাদের উপায় নাই। ধরা যাক যদি ১/৭ কে দশমিকে পরিণত করিতে চাই, তাহা হইলে ভাগ করিতে করিতে দেখিব ১, ২, ৩, ৪, ৫, ৬, ব্যতীত ভাগশেষ দেখা যায় না, এবং ছয় দফা ভাগ করার পর প্রথম ভাগশেষ পুনরায় দেখা দিবে, এবং তখনই ভাগফলেও পৌনঃপুনিকতা দেখা দিবে এখানে ভাগ করিয়া দেখিলে ব্যাপারটি বুঝিতে সুবিধা হইবে, আর ভাগ করার সময় আমাদের ভাগশেষগুলি দাগাইতে হইবে।

```
৭ ) ১·০০০০··· ( ·১৪২৮৫৭
    ৭
    ৩০
    ২৮
     ২০
     ১৪
      ৬০          ···৬০
                   ৫৬
                    ৪০
                    ৩৫
                     ৫০
                     ৪৯
                      ১
```

১ হইতে আরম্ভ করিয়া ক্রমিক ভাগশেষগুলি হইল ৩, ২, ৬, ৪, ৫ এবং আবার ভাগশেষরূপে ১ আসে। সুতরাং ভাজ্যের ঐ ছয়টি অঙ্কই আবার পুনঃপুনঃ আসে যখন ভাগপ্রক্রিয়া শেষ হয়না অথচ ভাজ্য ব্যতীত অন্য কোন ভাগশেষ থাকেনা, তখন আমরা এই প্রকার ঘটনার সম্মুখীন হই; অর্থাৎ অঙ্কগুলি পুনঃপুনঃ উদিত হয়। যদি আমরা ১/১১ ভগ্নাংশটিকে দশমিকে পরিবর্তিত করি, তাহা হইলে দেখিব যে ১০টি অঙ্কের পুর্বেই ভাগশেষগুলি আবৃত্ত হয় এবং ১/১৩ ভগ্নাংশটির ক্ষেত্রে এই পর্যাবৃত্ত ১২টি অঙ্কের বেশী. হয়না। পরীক্ষা করিলে দেখা যায় যে এই অঙ্কগুলির সংখ্যা নির্দিষ্ট ক্ষেত্রে কোন একটি নির্দিষ্ট সংখ্যা অপেক্ষা বৃহৎ হইতে পারেনা, কিন্তু অনেক ক্ষুদ্র হইতে পারে। উদাহরণ স্বরূপ, ১ কে ৩ দিয়া ভাগ করিলে দুইটি ভাগশেষ পাইবার সম্ভাবনা থাকে। কিন্তু ১/৩ ভগ্নাংশটির দশমিক রূপ $\overline{·৩}$—ইহাতে একটি ভাগশেষই পুনঃপুনঃ আসে। ·১ কে ৯ দ্বারা ভাগ করিলে ৮টি সম্ভাব্য ভাগশেষ হইতে পারে; কিন্তু ১/৯ = $\overline{·১}$; এক্ষেত্রেও একটি ভাগশেষই বারংবার পাওয়া যায়। ১/১১ ভগ্নাংশটির ক্ষেত্রে ২টি অঙ্ক এবং ১/১৩ ভগ্নাংশটিতে ৬টি অঙ্ক পুনঃপুনঃ আবৃত্ত হয়। বস্তুতঃ ৭ সংখ্যাটিই প্রথম হর যাহা দীর্ঘতম বিস্তারে পর্যাবৃত্ত হয় এবং পরের অনুরূপ সংখ্যাটি হইতে ১৭ অর্থাৎ ১/১৭ ভগ্নাংশটিকে দশমিকে প্রকাশ করিলে ১৬টি অঙ্কের পর অঙ্কগুলি আবৃত্ত হয়।

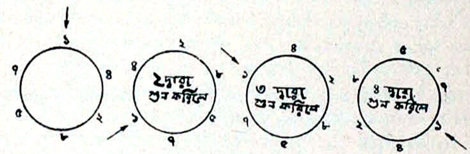
এখন ১/৭ ভগ্নাংশটির ক্ষেত্রে কয়েকটি আকর্ষণীয় তথ্য সম্বন্ধে আমরা আলোচনা করিব। জ্যামিতি বা ত্রিকোণমিতিতে যে কারণে বহুভুজ লইয়া আলোচনার পরিবর্তে ত্রিভুজ লইয়া আলোচনা করা হয়, সেই একই কারণে আমরা প্রথমে সরল দশমিক অর্থাৎ ১ সংখ্যাটিকে সর্বদা লব লইয়া আলোচনা করিব—অর্থাৎ আমরা সরল দশমিক লইয়া প্রাপ্ত ফলগুলি জটিল দশমিকের ক্ষেত্রে ব্যবহার করিব যেরূপ ত্রিভুজের ক্ষেত্রে প্রাপ্ত ফলগুলি জটিল বহুভুজের ক্ষেত্রে ব্যবহার করা হয়।

১/৭ = $\overline{·১৪২৮৫৭}$

পর্যাবৃত্তটিকে ২ দ্বারা গুণ করা যাক।

২ × ১৪২,৮৫৭ = ২৮৫,৭১৪

প্রাপ্ত সংখ্যাটির অঙ্কগুলি একই, কেবল অন্য প্রকারে সজ্জিত এবং লক্ষণীয় যে অঙ্কগুলির সজ্জা এলোমেলো নয়। ধরা যাক, অঙ্কগুলিকে একটি বৃত্তের চারিদিকে ঘড়ির কাঁটার গতির অনুরূপে অর্থাৎ বামাবর্তে সাজান হইল। এখানে সংখ্যাটিকে যথা ক্রমে ২,৩,৪,৫,৬ দ্বারা গুণ করা হইল।



এখন ইহা স্বতঃই প্রতিভাত যে গুণ প্রক্রিয়ার ফলে অঙ্কগুলির 'বৃত্তীয়ক্রম' (cyclic order)-এর কোনরূপ পরিবর্তন হয় না অর্থাৎ বৃত্তের পরিধি বরাবর অঙ্কগুলির আপেক্ষিক অবস্থান অপরিবর্তিত থাকে এবং এই বৃত্তগুলিকে চক্ররূপে যাহাদের ঘূর্ণন সম্ভব, কল্পনা করিলে আমরা বলিতে পারি যে গুণ প্রক্রিয়ার ফলে এই সকল ক্ষেত্রে চক্রটি কিঞ্চিৎ আবর্তিত হয় মাত্র।

৭ দ্বারা গুণ করিলে কিন্তু ইহার ব্যতিক্রম লক্ষ্য করা যায়।

৮, ৯ ইত্যাদি সংখ্যা লইয়াও আমরা উপরোক্ত পরীক্ষা করিতে পারি; কিন্তু এই সকল ক্ষেত্রে পরবর্তী পর্যাবৃত্ত হইতে আবৃত্তসূচক কিছু আসে; ছোট সংখ্যাগুলির ক্ষেত্রে যাহা প্রযোজ্য নয়।

·৯৯৯৯৯······কে উপরোক্ত পর্যাবৃত্তর সহিত অর্থাৎ $\overline{·১৪২৮৫৭}$ এর সহিত যোগ করিলে আরেকটি আকর্ষণীয় ফল লাভ করা যায়।

·১৪২৮৫৭১৪২৮৫৭···········

·৯৯৯৯৯৯৯৯৯৯৯৯············

যোগ প্রক্রিয়া শুরু করিলেই আমরা দেখিতে পাইব যে একক যোগ করিলে দশকের সংগে

যুক্ত হইবার জন্য থাকে ১ আবার দশক যোগ করিলে সহস্রের ঘরে ১ যুক্ত হয় এবং এই ভাবে ক্রম (order)-এর সংখ্যাগুলি যোগ করিলে পরবর্তী ক্রমের জন্য ১ সংখ্যাটি থাকিয়া যায় অর্থাৎ চলতি বাংলায় বলিতে হয় সর্বদা ১ সংখ্যাটি 'হাতে থাকে'।

এখন "১৪২,৮৫৭, এই পর্যাবৃত্তসূচক সংখ্যাটি লইয়া অপর একটি পরীক্ষা করিব। সংখ্যাটিকে '১৪২' ও '৮৫৭' এই দুই অংশে বিভক্ত করা হইল। এক্ষণে প্রথম অংশের প্রথম অঙ্কের সহিত দ্বিতীয় অংশের প্রথম অঙ্ক যোগ করা হইল। ঐ দুই অংশের দ্বিতীয় অঙ্কদ্বয় ও তৃতীয় অঙ্কদ্বয়ের যোগফলও বাহির করা হইল।

১+৮=৪+৫=২+৭=৯

পরে সকল অঙ্কগুলির যোগফল নির্ণয় করা হইল।

১+৪+২+৮+৫+৭=২৭

এখন পর্যাবৃত্তসূচক সংখ্যাটিকে দুই অঙ্কের তিনটি সংখ্যায় ভাগ করা হইল ও ঐ তিনটি সংখ্যার যোগফল লওয়া হইল।

১৪+২৮+৫৭=৯৯;

বা, অন্য বৃত্তীয় ক্রম লইয়া

৪২+৮৫+৭১=১৯৮।

এখন সর্বশেষে পর্যাবৃত্তসূচক সংখ্যাটিকে দুই অংশে খণ্ডিত করিয়া আমরা যে দুইটি তিন অঙ্কের সংখ্যা পাই তাহাদের যোগফল নির্ণয় করা হইল—

১৪২+৮৫৭=৯৯৯

৪২৮+৫৭১=৯৯৯

২৮৫+৭১৪=৯৯৯

লক্ষণীয় এই যোগগুলির প্রত্যেকটি ৯'দ্বারা বিভাজ্য। ১/১৩ ভগ্নাংশটিকে দশমিক রূপে প্রকাশ করিলে দেখা যায় ইহার পর্যাবৃত্ত বিস্তার হইল ০৭৬৯২৩ এবং অঙ্কগুলিকে একইভাবে সজ্জিত করিলে অনুরূপ ফল পাওয়া যায়। ইহা কি উল্লেখযোগ্য নহে?

পূর্বোক্ত ক্ষেত্রে ২,৩,৪,৫,৬ দ্বারা পর্যায়ক্রমে গুণ প্রক্রিয়ার সাহায্যে আমরা যে ফল লাভ করিয়াছিলাম, তাহা ১/১৩ ভগ্নাংশটির ক্ষেত্রে প্রযোজ্য নহে কারণ এক্ষেত্রে পর্যাবৃত্তির বিস্তার যতদূর সম্ভব বিস্তারের অর্ধেক মাত্র। দেখা যায় যে ১, ৩, ৪, ৯, ১০, ১২ দ্বারা গুণ করিলে একই অঙ্কমালা বৃত্তীয় ক্রমে আসে, কিন্তু, যদি ২, ৫, ৬, ৭, ৮, ১১ দ্বারা গুণ করা যায় তাহা হইলে নতুন একটি '১৫৩,৮৪৬' পাওয়া যায়। সংখ্যাটির অঙ্কগুলির যোগফল দ্বারা পূর্বে প্রাপ্ত ফলাফল যে এক্ষেত্রে প্রযোজ্য, তাহা দেখান যায়।

সংখ্যাটির একটি করিয়া অঙ্ক লইয়া যোগফল ১+৫+৩+৮+৪+৬=

সংখ্যাটির দুইটি করিয়া অঙ্ক লইয়া যোগফল ১৫+৩৮+৪৬= বা ৫৩+৮৪+৬১=

সংখ্যাটির তিনটি করিয়া অঙ্ক লইয়া যোগফল =১৫৩+৮৪৬=বা ৫৩৮+৪৬১=
বা ৩৮৪+৬১৫=

লক্ষণীয় যে এই একই ফলাফল আমরা নিম্নলিখিত ডাকের (set) গুণকগুলির (multiplier) প্রত্যেকটি হইতে পাইতে পারি :

১	৩	৪	৯	১০	১২
২	৫	৬	৭	৮	১১

এক্ষেত্রে প্রথম পঙ্‌ক্তির প্রান্ত সংখ্যাদ্বয়ের যোগফল ১৩ এবং দ্বিতীয় সারির প্রান্ত সংখ্যাদ্বয়ের যোগফলও '১৩' আবার যে কোন পঙ্‌ক্তির মধ্যবর্তী দুই সংখ্যার যোগফলও ১৩।

ভগ্নাংশের হরটি একটি মৌলিক (prime) সংখ্যা হইলে যে কোন আবৃত্ত দশমিকের জন্য আমরা এই একই ফলাফল সর্বদা লাভ করিব। উদাহরণ স্বরূপ বলা যায় যে ১/১৭ ভগ্নাংশটির পর্যাবৃত্ত সূচক সংখ্যাটি ১৬ অঙ্কের এবং আমরা উহাদের লইয়া পূর্বোক্তরূপ যে কোন সংযুক্তি (combination) করিতে পারি। যদি হরটি দশ অপেক্ষা বৃহৎ হয়, তবে সংখ্যাটির শুরুতে এক বা একাধিক শূন্য হইবে। যদি পর্যাবৃত্ত সূচক সংখ্যাটির প্রথম অর্ধেক অঙ্কগুলি জানা থাকে তবে বাকী অঙ্কগুলি আর ভাগ না করিয়াই জানা সম্ভব, কারণ ৭ সংখ্যাটি হর হইলে যে সত্য প্রযোজ্য এবং ১৩ সংখ্যাটির ক্ষুদ্র বিস্তারে যাহার সত্যতা আমরা যাচাই করিয়াছি তাহা এক্ষেত্রেও প্রযোজ্য; অর্থাৎ যদি পর্যাবৃত্তকে দুই অংশে বিভক্ত করা যায়, তবে প্রত্যেক অংশের অঙ্কগুলির যোগফল ৯ হইবে। সুতরাং ১৭ হরটির পর্যাবৃত্তের প্রথম ৮টি অঙ্ক জানা থাকিলে বাকী ৮টি অঙ্কও সহজেই নির্ণয় করা যায়। প্রথম ১০টি অঙ্ক দেওয়া হইল : ০৫৮৮২৩৫২৯৪।

আমরা বাকী ছয়টি অঙ্কও লিখিতে পারি এবং ৭ সংখ্যাটির ক্ষেত্রে যে পরীক্ষা করিয়াছিলাম, তাহা এক্ষেত্রেও করিতে পারি। অঙ্কগুলিকে একটি বৃত্তের চারিপাশে সজ্জিত করা যাউক এবং সর্বদা শূন্যকে প্রথম অঙ্ক ধরিয়া ইহাদের যথাক্রমে ২, ৩, ৪···১৬ দ্বারা গুণ করা হউক। আমরা দেখিব যে গুণফল বৃত্তের চতুষ্পার্শ্বস্থ অঙ্কগুলি দ্বারা গঠিত কিন্তু বৃত্তের আপেক্ষিকে ইহাদের অবস্থানের পরিবর্তন ঘটিয়াছে।

আবার, যদি অঙ্কগুলি হইতে একটি, দুইটি, চারটি বা আটটি করিয়া সংখ্যা গঠন করা যায় অর্থাৎ অঙ্কগুলিতে এমন জোট (group)-এ লওয়া হয় যাহাতে প্রত্যেক জোটে সমান সংখ্যক অঙ্ক থাকে এবং ইহাদের সমস্ত সম্ভাব্য সংযুক্তি লওয়া হয়, তবে দেখা যাইবে যে যোগফল সর্বদা ৯ সংখ্যাটির গুণিতক (multiple) হইবে।

৫+৮+৮+২+৩+ ···

৫৮+৮২+৩৫+৫২+ ···

৫+৮৮+২৩+৫২+ ···

৫৮৮+২৩৫২+ ···

৫৮৮২+৩৫২৯+ ···

ইত্যাদি।

মাত্র ভাগফলেরই নহে, ভাগশেষেরও বিশেষ ধর্ম (property) বর্তমান। আমরা পুর্বেই দেখিয়াছি যে ৭ দ্বারা ভাগ করিলে ভাগশেষ যথাক্রমে ১, ৩, ২, ৬, ৪, ৫ হইবে। ইহাদের দুই জোটে বিভক্ত করা হইল এবং প্রত্যেক জোটের একই অবস্থানের অঙ্কদ্বয়ের যোগফল লওয়া হইল অর্থাৎ প্রথম জোটের প্রথম অঙ্কের সহিত দ্বিতীয় জোটের প্রথম অঙ্ক, প্রথম জোটের দ্বিতীয় অঙ্কের সহিত দ্বিতীয় জোটের দ্বিতীয় অঙ্ক এইভাবে যোগ করা হইল।

$$১৩২৬৪৫\ ;\ ১+৬=৩+৪=২+৫=৭$$

অথবা প্রত্যেক জোটের অঙ্কগুলির যোগফল পৃথক ভাবে লইলে, ১+২+৪=৭, ৩+৬+৫=১৪

আবার ছয়টি সংখ্যার যোগফল হইল, ১+৩+২+৬+৪+৫=২১

এখনে দুইটি করিয়া অঙ্ক লইয়া যে সকল সংখ্যা গঠিত হয় তাহাদের যোগফল লওয়া হউক : ১৩+২৬+৪৫=৮৪, ৩২+৬৪+৫১=১৪৭।

তিনটি করিয়া অঙ্ক লইলে

১৩২+৬৪৫=৩২৬+৪৫১=২৬৪+৫১৩=৭৭৭

স্পষ্টতঃ, এই ভাগশেষগুলির সহিত ৭ সংখ্যাটির সম্পর্ক বর্তমান।

• • •

'$\frac{১}{১৭}$' ভগ্নাংশটিকে দশমিকে প্রকাশ করিলে ছয়টি ভাগশেষ পাওয়া যায় : ১০, ৯, ১২, ৩, ৪, ১। '৭' সংখ্যাটিকে হর ধরিয়া আমরা যে সকল প্রক্রিয়া করিয়াছি, তাহা এক্ষেত্রেও করা সম্ভব ; তবে এক্ষেত্রে '১৩' সংখ্যাটির সহিত আমাদের পুনঃপুনঃ সাক্ষাৎ ঘটিবে।

সকল ভাগশেষগুলিই এক অঙ্কের না হইলে ইহাদের ব্যবহার কিঞ্চিৎ আয়াসসাধ্য ; সুতরাং এক্ষেত্রে সংযুক্তি সম্বন্ধে আমরা আলোচনা করিব। আমরা পুর্বেই দেখিয়াছি যে যখন '৩' ও '৪' অঙ্কদ্বয় একত্রে আসে তখন দুটি করিয়া অঙ্ক লইয়া যোগ করার সময় আমরা ৩৪ যোগ করি অর্থাৎ বস্তুতঃ আমরা '৩০+৪' ব্যবহার করি। অনুরূপে, যখন '১০' ও '৯' একত্রে আসে, তখন আমরা '১০০+৯' বা ১০৯ লিখিব। আবার ৯ এবং ১২ একত্রে আসিলে '৯০+১২' বা ১০২ লিখিব। অতএব, আপাত দৃষ্টিতে বিভিন্ন বলিয়া প্রতীয়মান হইলেও আসলে প্রক্রিয়াগুলি একই প্রকারের। ১০৯+১২৩+৪১= অথবা, ১০২+৩৪+২০=

১৩ সংখ্যাটি গুণনীয়ক (factor) হিসাবে কতবার এই যোগগুলিতে আসে তাহা লক্ষ্য করা যাইতে পারে এবং প্রাপ্ত ফলাফলের সহিত ৭ এর ক্ষেত্রে প্রাপ্ত অনুরূপ প্রক্রিয়ার ফলাফলের তুলনা করা যাইতে পারে।

১১০২+··· =
+৪২০=
+২০৯=

উপরোক্ত শূন্যস্থানগুলি পুরণ করিতে এবং যোগফলগুলি কিভাবে ১৩ সংখ্যাটির সহিত সম্পর্কযুক্ত তাহা আলোচনা করিতে পাঠকবৃন্দ সত্যিকারের আনন্দলাভ করিবেন।

যেহেতু $\frac{১}{১৭}$ সংখ্যাটির পর্যাবৃত্তিতে একটি ১৬ অঙ্কের বিস্তার পাওয়া যায়, অতএব ইহার ভাগশেষগুলির সংযুক্তি সাধনের বিস্ময়কর সম্ভাবনা বর্তমান। পুর্ববর্তী দুইটি ক্ষেত্রে আমরা যেভাবে অঙ্কগুলির যোগফল নির্ণয় করিয়াছি, এক্ষেত্রে অনুরূপে যোগফল নির্ণয় করিলে আমরা দেখিতে পাইব যে প্রতিটি যোগফল ১৭ সংখ্যাটির গুণিতক (multiple) হইবে।

• • •

এখনে প্রদত্ত একটি আবৃত্ত দশমিক হইতে কি ভাবে উহার আদি ভগ্নাংশটি পাওয়া সম্ভব, তাহা আমরা বিচার করিয়া দেখিব। উদাহরণ স্বরূপ, মনে করা যাউক যে প্রদত্ত দশমিকটি হইল— ·৭৭৭

ধরা যাউক, ক = ·৭৭৭৭···

অতএব ১০ ক = ৭·৭৭৭৭···

∴ ৯ ক = ৭, যেহেতু দশমিকের সংখ্যাগুলি উভয় ক্ষেত্রে অভিন্ন।

$$\therefore ক = \frac{৭}{৯}$$

এখন, ·৩৫৩৫···দশমিকটিকে ভগ্নাংশে প্রকাশ করিব

মনে করি, ক = ·৩৫৩৫···

∴ ১০০ ক = ৩৫·৩৫৩৫···

∴ ৯৯ ক = ৩৫

$$\therefore ক = \frac{৩৫}{৯৯}$$

অনুরূপে, ·৩৭০৩৭০···দশমিকটিকে ভগ্নাংশে প্রকাশ করা যাইতে পারে। ধরা যাউক,

ক = ·৩৭০৩৭০···

∴ ১০০০ ক = ৩৭০·৩৭০৩৭০

∴ ৯৯৯ ক = ৩৭০

$$\therefore ক = \frac{৩৭০}{৯৯৯} = \frac{৩৭০}{৯ \times ১১১} = \frac{৩৭০}{৯ \times ৩ \times ৩৭} = \frac{১০}{২৭}$$

এই সকল উদাহরণ হইতে আমরা আবৃত্ত দশমিককে ভগ্নাংশে প্রকাশ করিবার একটি নিয়ম বাহির করিতে পারি। পর্যাবৃত্ত সূচক সংখ্যাটিকে লব লইয়া এবং পর্যাবৃত্ত সূচক সংখ্যাটিতে যতগুলি অঙ্ক আছে, ততগুলি ৯ দ্বারা হরটি গঠন করিতে হইবে।

জ্যামিতিক প্রগতি (geometric progression) এর সাহায্যেও এই ফলাফল নির্ণয় করা সম্ভব। উদাহরণ স্বরূপ, ·৭৭৭...আবৃত্ত দশমিকটি নিম্নলিখিত প্রগতির সমান।

$$\frac{৭}{১০}+\frac{৭}{১০০}+\frac{৭}{১০০০}+\cdots$$

এখানে অ = $\frac{৭}{১০}$, র = $\frac{১}{১০}$ এবং 'ন' অনন্ত সংখ্যা পর্যন্ত বর্দ্ধিত।

এখানে, অ = প্রগতির প্রথম পদ

র = সাধারণ অনুপাত অর্থাৎ যে কোন সংখ্যা ও তাহার পূর্ব সংখ্যার অনুপাত।

এবং ন = প্রগতির মোট পদসংখ্যা।

এক্ষেত্রে যোগফল নির্ণয়ের সূত্র হইল

$$\text{যোগফল} \therefore স = \frac{অ}{১-র} = \frac{৭}{৯}$$

দ্বিতীয় উদাহরণের ক্ষেত্রে

$$\overline{·৩৫} = \frac{৩৫}{১০০}+\frac{৩৫}{১০০^২}+\frac{৩৫}{১০০^৩}+\cdots$$

ইহাতে, 'অ' ও 'র' এর মান বসাইয়া সহজেই যোগফল 'স' বাহির করা যাইবে।

যদি আবৃত্ত দশমিকটির পূর্বে একটি পূর্ণ সংখ্যা (whole number) থাকে, তবে প্রথমে মাত্র দশমিক অংশটিকে ভগ্নাংশে পরিণত করিয়া পূর্ণ সংখ্যাটির সহিত যোগ করা সুবিধাজনক। যেমন, ২·৭৭৭...এর ক্ষেত্রে ২·৭৭৭... = ২$\frac{৭}{৯}$

কিন্তু আমাদের পূর্বের প্রক্রিয়াও এক্ষেত্রে প্রযোজ্য

$$\begin{aligned} ক &= ২·৭৭৭\ldots \\ ১০ক &= ২৭·৭৭৭\ldots \\ \hline \therefore\ ৯ক &= ২৫ \\ \therefore\ ক &= \frac{২৫}{৯} = ২\tfrac{৭}{৯} \end{aligned}$$

যদি দশমিক বিন্দু এবং আবৃত্ত অংশের মাঝে সরল দশমিক (simple decimal) রূপে এক বা একাধিক অঙ্ক থাকে তবে সেক্ষেত্রেও এই একই প্রক্রিয়া প্রযোজ্য। উদাহরণস্বরূপ, ·৮৫৩২৩২৩২...দশমিকটিকে লওয়া হইল।

$$\begin{aligned} ক &= ·৮৫৩২৩২\ldots \\ ১০০\ ক &= ৮৫·৩২৩২৩২\ldots \\ ১০০০০\ ক &= ৮৫৩২·৩২৩২\ldots \\ \hline \therefore\ ৯৯০০\ ক &= ৮৪৪৭ \\ \therefore\ ক &= \frac{৮৪৪৭}{৯৯০০} \end{aligned}$$

কতকগুলি আবৃত্ত দশমিকের ক্ষেত্রে পর্যাবৃত্ত সূচক সংখ্যায় বৃহত্তম সম্ভাব্য অঙ্কসংখ্যা থাকে এবং কতকগুলির পর্যাবৃত্ত বিস্তার সম্ভাব্য বিস্তার অপেক্ষা কম হয়। আবৃত্ত দশমিকের এই ব্যবহারের কারণ অনুসন্ধান করিতে চেষ্টা করিবার মত জ্ঞান আমরা সঞ্চয় করিয়াছি।

কোন প্রদত্ত পর্যাবৃত্ত বিস্তারের অঙ্কসংখ্যা জানা থাকলে, আমরা দেখিয়াছি যে ভগ্নাংশের হরটি সেই অঙ্কসংখ্যার সমসংখ্যক '৯' দ্বারা গঠিত হয়। এবং সেই জন্যই যদি কোন প্রকারে হরটির কতগুলি '৯' আছে জানা যায়, তাহা হইলে আবৃত্ত দশমিকটির পর্যাবৃত্ত সম্বন্ধেও আমাদের সম্যক্ জ্ঞান জন্মে।

'$\frac{১}{১১}$' ভগ্নাংশটির পর্যাবৃত্ত বিস্তার করিতে চেষ্টা করা যাউক। মনে করি, ক = প্রদত্ত ভগ্নাংশটি হইতে জাত আবৃত্ত দশমিকের পর্যাবৃত্ত বিস্তার।

$$\frac{১}{১১} = \frac{ক}{৯৯৯৯\ldots}$$

এখানে হরটিতে ৯ এর সংখ্যা 'ক' এর অঙ্কসংখ্যার সমান। প্রদত্ত সমীকরণটির উভয়-পক্ষের হরকে ১১ দ্বারা ভাগ করিলে বামপক্ষ ১-এর সমান হয়; অতএব দক্ষিণ পক্ষও ১-এর সমান হইবে। দক্ষিণ পক্ষের হরটি ১১ দ্বারা বিভাজ্য হইতে কমপক্ষে কয়টি ৯ প্রয়োজন? স্পষ্টতঃ, মাত্র দুইটি। $\therefore$ ক = $\frac{৯৯}{১১}$ = ০৯

$\frac{১}{৭}$ ভগ্নাংশটির জন্যও উপরোক্ত প্রক্রিয়াটি চেষ্টা করা যাইতে পারে।

$$\frac{১}{৭} = \frac{ক}{৯৯৯৯৯\ldots}$$

এখন আমাদের দেখিতে হইবে যে দ্বিতীয় হরটিকে ৭ দ্বারা বিভাজ্য করিতে হইলে অন্যূন কয়টি ৯ প্রয়োজন। দেখা যাইবে যে ন্যূনপক্ষে ছয়টি ৯ প্রয়োজন। সুতরাং $\frac{১}{৭}$ ভগ্নাংশটির বিস্তার ছয় অঙ্কের হইবে।

$$\frac{১}{৭} = \frac{ক}{৯৯৯৯৯৯}$$

উভয় পক্ষের হরকে ৭ দ্বারা ভাগ করিয়া

$$১ = \frac{ক}{১৪২৮৫৭}$$

$\therefore$ ক = ১৪২,৮৫৭ অর্থাৎ আমরা আমাদের বহু পরিচিত সংখ্যাটির সাক্ষাৎ লাভ করিলাম।

ইহার সাহায্যে সহজেই বোঝা যায় কেন $\frac{১}{৭}$ বা $\frac{১}{১৩}$ ভগ্নাংশগুলির প্রতিটির ক্ষেত্রে পর্যাবৃত্ত এক অঙ্কের হয়। দেখা গিয়াছে যে ৭ ও ১৩ উভয়ের দ্বারাই '৯৯৯,৯৯৯' সংখ্যাটি বিভাজ্য। অতএব উভয়ের ক্ষেত্রেই পর্যাবৃত্ত ছয় অঙ্কের হইবে।

$$২২২,২২২ = ২ \times ১১১,১১১ = ২ \times ৩ \times ৩৭,০৩৭$$
$$= ২ \times ৩ \times ৩৭ \times ১০০১$$
$$= ৩^{৩} \times ৭ \times ১১ \times ১৩ \times ৩৭$$

ইহা হইতে আপাতদৃষ্টিতে মনে হইতে পারে যে '$\frac{১}{৩৭}$ ভগ্নাংশটির ক্ষেত্রেও পর্যাবৃত্ত ছয় অঙ্কের হইবে। কিন্তু দেখা গিয়াছে যে এক্ষেত্রে এতগুলি '৯' প্রয়োজন হয় না। '৯৯৯' সংখ্যাটি '৩৭' দ্বারা বিভাজ্য। অতএব '$\frac{১}{৩৭}$' ভগ্নাংশটির ক্ষেত্রে পর্যাবৃত্ত মাত্র তিন অঙ্কের হয়;

$$\frac{১}{৩৭} = \overline{\cdot ০২৭}$$

'৯', '৯৯', '৯৯৯' ইত্যাদিকে এই প্রকারে না প্রকাশ করিয়া সাধারণতঃ $১০-১$, $১০^{২}-১$, $১০^{৩}-১$ ইত্যাদি বিশেষ প্রকারে প্রকাশ করা হইয়া থাকে। অতএব, নিয়মটিকে নিম্নলিখিতভাবে লিপিবদ্ধ করা যাইতে পারে—

$১০^{ক}-১$ যে কোন মৌলিক সংখ্যা 'ন' দ্বারা বিভাজ্য হইলে $\frac{'১'}{ন}$ ভগ্নাংশটির পর্যাবৃত্ত বিস্তার 'ক' এর সর্বনিম্ন মান দ্বারা নির্ণীত হয়।

$১০^{ক}-১$ এর মৌলিক উৎপাদক প্রদর্শনকারী নিম্নলিখিত ছকটি আকর্ষণীয় বোধ হইতে পারে; এখানে ক = ১, ২, ৩,……

$$১০^{১}-১ = ৩^{২}$$
$$১০^{২}-১ = ৩^{২} \times \underline{১১}$$
$$১০^{৩}-১ = ৩^{৩} \times \underline{৩৭}$$
$$১০^{৪}-১ = ৩^{২} \times ১১ \times \underline{১০১}$$
$$১০^{৫}-১ = ৩^{২} \times \underline{৪১} \times \underline{২৭১}$$
$$১০^{৬}-১ = ৩^{৩} \times ৭ \times ১১ \times \underline{১৩} \times ৩৭$$
$$১০^{৭}-১ = ৩^{২} \times \underline{২৩৯} \times \underline{৪৬৪৯}$$
$$১০^{৮}-১ = ৩^{২} \times \underline{১১} \times ৩৭ \times ১০১ \times \underline{১৩৭}$$
$$১০^{৯}-১ = ৩^{৪} \times ৩৭ \times \underline{৩৩৩,৬৬৭}$$
$$১০^{১০}-১ = ৩^{২} \times ১১ \times ৪১ \times ২৭১ \times \underline{৯০৯১}$$

নিম্নরেখ সংখ্যাগুলি নির্দেশ করে যে ইহারা' উৎপাদক হিসাবে এই প্রথম উপরোক্ত ছকে আসিল এবং ইহাদের বিস্তার ঐ সারির ১০ এর ঘাত (power) দ্বারা নিরূপিত হয়।

লক্ষণীয় যে অতি বৃহৎ সংখ্যার ক্ষেত্রে বিস্তার অত্যন্ত ক্ষুদ্র হইতে পারে। ২৭১ ও ৩৩৩, ৬৬৭ সংখ্যাদ্বয়কে উদাহরণরূপে দেখান যাইতে পারে। $\frac{১}{১০১}$ ভগ্নাংশটিকে দশমিকরূপে প্রকাশ করিলে পর্যাবৃত্ত বিস্তার ১০০ অঙ্ক হইবে আশা করা যায়; কিন্তু দেখা গিয়াছে যে ইহার পর্যাবৃত্ত মাত্র চার অঙ্কের হয়।

'১০০' অপেক্ষা ক্ষুদ্র মাত্র নয়টি সংখ্যার ক্ষেত্রে পর্যাবৃত্ত বিস্তার পূর্ণ দৈর্ঘ্যের হয়। ইহাদের মধ্যে সর্বোচ্চ হরটি হইল '৯৭' অর্থাৎ '$\frac{১}{৯৭}$' ভগ্নাংশটির পর্যাবৃত্ত বিস্তারে '৯৬' টি রাশি আছে। অবশ্য

'$\frac{১}{১৭}$', '$\frac{২}{১৭}$', …'$\frac{১৬}{১৭}$, ভগ্নাংশগুলির ক্ষেত্রে পর্যাবৃত্ত ঐ একই দৈর্ঘ্যের হয় এবং প্রতিটির ক্ষেত্রে পর্যাবৃত্তটি একই বৃত্তীয়ক্রমে গঠিত হয়।

আমাদের উপরোক্ত পর্যাবৃত্ত তখনই সত্য হইবে যখন হরটি একটি মৌলিক সংখ্যার হইবে। উদাহরণস্বরূপ, $\frac{১}{২১} = \cdot ০৪৭৬১৯$ এই পর্যাবৃত্তটিতে '১৪২, ৮৫৭' পর্যাবৃত্তটির মত কোন বিশেষ ধর্ম বর্তমান নহে। আরও অনেক ক্ষেত্রে আবার অঙ্ক সংখ্যার যোগফল '৯' সংখ্যাটির গুণিতক (multiple) হইবে।

$$\frac{১}{৩৯} = \overline{\cdot ০২৫৬৪১}, \quad ২+৫+৬+৪+১=১৮$$
$$\frac{১}{৭৭} = \overline{\cdot ০১২৯৮৭}, \quad ০+৯=১+৮=২+৭,$$
$$\text{এবং } ১+২+৯+৮+৭=২৭$$
$$\frac{১}{২৩১} = \cdot ০০৪৩২৯, \quad ৪+৩+২+৯=১৮$$

এবং এখন প্রশ্ন এই যে, যে দশমিকগুলি পর্যাবৃত্ত নহে, অথচ অসীম (infinite) দশমিক, তাহাদের সম্বন্ধে আমরা কি বলিতে পারি? সত্যই এইরূপ দশমিকের অস্তিত্ব বর্তমান এবং এইরূপ অনেক দশমিকই উদাহরণস্বরূপ আমরা উপস্থাপিত করিতে পারি। উদাহরণস্বরূপ—
·২১২১১২১১১২১১১১২…… এই অসীম ও অনাবৃত্ত (non-repeating) দশমিকটির বিচার করা যাইতে পারে। আমরা দেখিয়াছি যে একটি ভগ্নাংশকে সর্বদা হয় একটি সসীম অথবা একটি আবৃত্ত দশমিকরূপে প্রকাশ করা যাইতে পারে। বিপরীতপক্ষে উপরোক্ত উভয়প্রকার দশমিককেই ভগ্নাংশরূপে প্রকাশ করা সম্ভব। অতএব, ইহা নিশ্চিত যে, যে অসীম দশমিকটি অনাবৃত্ত হইবে, তাহাকে ভগ্নাংশরূপে প্রকাশ করা যাইবে না; এই প্রকারের দশমিকগুলিকে লইয়াই অমূলদ (irrational) রাশিসমূহ গঠিত হয়।

$\sqrt{২}$-কে উদাহরণরূপে গ্রহণ করা যাইতে পারে। প্রচলিত রীতি অনুযায়ী ইহার মূল নির্ণয় করা যাইতে পারে। দেখা যাইবে যে যতদূর দশমিক স্থান (decimal place) পর্যন্ত আমরা অগ্রসর হই না কেন, দশমিকটি কখনই সসীম বা আবৃত্ত হইবে না। একটি নতুন অঙ্ক যুক্ত হইলে যে দশমিকটি সৃষ্ট হয়, তাহার বর্গ (square) পুরাতন দশমিকটির বর্গ অপেক্ষা ২ সংখ্যাটির অধিকতর নিকটবর্তী। এই অঙ্কগুলি কখনও নিয়মিত ক্রমে আসে না এবং দশমিকটির কোন পর্যাবৃত্ত বিস্তারও নাই। পর্যাবৃত্ত বর্তমান থাকিলে আমরা $\sqrt{২}$-এর সঠিক মূল বাহির করিতে পারিতাম। সাত দশমিক স্থান পর্যন্ত $\sqrt{২}$এর মান $= ১\cdot৪১৪২১৩৬$ আপাত দৃষ্টিতে ইহার সহিত আবৃত্ত দশমিকগুলির কোন পার্থক্য দেখা যায় না; কিন্তু ইহা সন্দেহাতীত যে যাহাই মনে হউক বা যতবেশী স্থান পর্যন্ত, সহস্র বা লক্ষ স্থান পর্যন্ত, মান নির্ণয় করা যাউক না কেন, ইহা দ্বারা কোন পর্যাবৃত্ত পৌনঃপুনিকতা সূচিত হয় না।

Mathematical Excursions by H. A. Merrill হইতে—অসীম চট্টোপাধ্যায় অনূদিত।

কার্ল ফ্রিডরিক গ্যয়স

১৭৭৭-১৮৫৫

অঙ্কশাস্ত্রের অবিস্মরণীয় ব্যক্তিত্রয় হইলেন আর্কিমিডিস, নিউটন এবং গ্যয়স। আর্কিমিডিসের সঙ্গে সঙ্গে গ্রীসের যে দ্বার অবরুদ্ধ হইয়া গিয়াছিল তাহাই আবার আধুনিক যুগের কাছে উন্মুক্ত করিয়া ধরিলেন নিউটন এবং শত বর্ষ পরে গ্যয়স অঙ্কশাস্ত্রে সাফল্যের নবযুগ প্রবর্তন করিলেন।

গ্যয়সের পিতা গেবহার্ড জার্মাণীর ছোট শহর ব্রান্সউইকের শ্রমিক ছিলেন। জীবন ধারণের জন্য সারা বৎসর ধরিয়া তাহাকে একটানা কঠোর পরিশ্রম করিতে হইত। তাহার প্রথম স্ত্রীর নাম ছিল ডরোথিয়া ওয়ারনে। ইনি একটি মাত্র পুত্রসন্তান যোহান গর্গ হাইনরিখকে রাখিয়া ত্রিশ বৎসর বয়সে পরলোক গমন করেন। ইহার মৃত্যুর পর গেবহার্ড ডরোথিয়া বেনজ নামে এক অশিক্ষিতা পরিচারিকাকে বিবাহ করেন। ১৭৭৭ খৃষ্টাব্দের এপ্রিল মাসে তাহাদের একটি পুত্রসন্তান জন্মগ্রহণ করিল। নবজাতকের নামকরণ করা হইল যোহান ফ্রিডরিক কার্ল। এই কার্লই উত্তরকালে অশেষ দরিদ্র্যতা ও অখ্যাত পটভূমিকা হইতে অঙ্ক শাস্ত্রের ইতিহাসে সাফল্যের উচ্চ শিখরে অধিষ্ঠিত হইয়াছিলেন।

শিশু বয়সেই কার্লের মধ্যে বহুবিধ প্রতিভার স্ফূরণ দেখা গিয়াছিল। পিতা মাতা এই সব দেখিয়া ভাবিলেন কার্ল ক্ষীণ পরমায়ু লইয়া জন্ম গ্রহণ করিয়াছে কেননা ঈশ্বরের কৃপাধন্য ও বিশেষ অনুগৃহীতরা অতি অল্প বয়সেই মারা যায়। পরিষ্কার ভাবে মুখে কথা ফুটিবার আগেই কার্ল যোগ বিয়োগ করিতে পারিতেন। বিস্ময়কর প্রতিভাসম্পন্ন কার্ল যে রকম স্বাভাবিক ভাবে যোগ বিয়োগ করিবার বুৎপত্তি অর্জন করিয়াছিলেন ঠিক সেই রকম আশ্চর্যজনক সহজ উপায়ে লেখাপড়া শিখিয়াছিলেন। পিতার নিকট বর্ণমালা চিনিয়া লইয়া তিনি নিজে নিজেই লিখিতে পড়িতে শিখিয়াছিলেন।

কার্লের অপরিণত বয়সের এই সকল কৃতিত্বসমূহ তাহার পিতামাতা অত্যন্ত গর্বসহকারে প্রচার করিতে ভালবাসিতেন। তাহারা এইগুলিকে বৈঠকি মজার চাতুর্যপূর্ণ কৌশল মনে করিতেন। দুর্ভাগ্যবশতঃ কার্ল গ্যয়স উত্তরাধিকারী সূত্রে ক্ষীণ দৃষ্টিশক্তির অধিকারী ছিলেন।

চাতুর্যপূর্ণ কৌশল অর্থাৎ বৈঠকি মজা এবং প্রতিভার মধ্যে যে দুস্তর ব্যবধান রহিয়াছে তাহা গেবহার্ড হয়ত বুঝিতে পারিতেন না বলিয়াই হউক কিংবা অনিচ্ছুক ছিলেন বলিয়াই হউক পুত্রের প্রতিভাকে স্বীকার করিতে চাহিতেন না। তিনি কার্লকে তাঁতের কাজে নিয়োজিত করিলেন। তাহার অভিপ্রায় ছিল কার্ল অন্ততঃ পক্ষে পিতৃব্য যোহান বেনজের মত একজন সুদক্ষ তাঁতি হোক। কার্ল পিতৃব্যকে অত্যন্ত ভালবাসিতেন। যোহান বেনজই প্রথম কার্লের প্রতিভাকে যথাযোগ্য

স্বীকৃতি দিয়াছিলেন। কৈশোরে নিজস্ব যে সকল আশা আকাঙ্ক্ষা স্বপ্ন সাধ দরিদ্রতার নির্মম কশাঘাতে বিলীন হইয়া গিয়াছিল তাহারই পূর্ণতার নবতর সম্ভাবনা দেখিয়া তিনি ভাইপোকে উৎসাহিত করিয়াছিলেন।

সাত বৎসর বয়সে কার্লকে স্থানীয় গ্রামার স্কুলে পাঠানো হইল। সেইখানে একদিন জনৈক শিক্ষক ক্লাসের ছেলেদের জব্দ করিবার জন্য ১ হইতে ১০০ পর্যন্ত প্রতিটি সংখ্যাকে যোগ করিতে দিলেন। প্রশ্নটি বলিতে না বলিতেই কার্ল শিক্ষকের সামনে শ্লেট বাড়াইয়া ধরিল। সংখ্যানুক্রম সূত্র দ্বারা যে এইরূপে যোগ করা যাইতে পারে ইতিপূর্বে কার্লকে কেহই তাহা শিখাইয়া দেয় নাই অথচ নিজে নিজেই কি ভাবে ঐ সূত্র আবিষ্কারে সমর্থ হইল ইহা ভাবিয়া শিক্ষক যারপরনাই বিস্মিত হইলেন। তখন পর্যন্ত কেবলমাত্র পিথাগোরাসের শিষ্যরাই এই সূত্র নিজেদের মধ্যে সাঙ্কেতিক ভাবে ব্যবহার করিতেন। $1/2n\,(n+1)=s$, এইখানে s হইল সমষ্টি এবং $1, 2, 3\cdots n$ অনুক্রমের শেষ সংখ্যা হইল n।

গ্যয়স সম্ভবতঃ ১০০ র সঙ্গে ১, ৯৯ র সঙ্গে ২, ৯৮ র সঙ্গে ৩ যোগ করিয়া সমাধান বাহির করিয়াছিলেন। কেননা, প্রতিবারেই যোগফল দাঁড়াইতেছে ১০১ এবং যেহেতু একশটি সংখ্যা যোগ করিতে হইতেছে অতএব এখানে ৫০ গোছ (set) ১০১ রহিয়াছে। ১০১ এর ৫০ গুণ হইল ৫,০৫০; সুতরাং সমস্যাটির উত্তরও ইহাই হইবে। (অথবা সূত্র অনুযায়ী $1/2\times100\times101=5{,}050$)।

দরিদ্রতা ও নানা প্রকার বাধা বিপত্তি অতিক্রম করিয়া কার্ল পড়াশুনো করিতে লাগিলেন। কিংবদন্তীর মত গ্যয়সের বিস্ময়কর প্রতিভার কথা যথা সময়ে ব্রান্সউইকের ডিউকের কানে পৌছিল। ডিউক কার্লকে দুর্গে ডাকাইয়া আনিলেন এবং এইভাবে দু'জনের মধ্যে যে বন্ধুত্বের সূত্রপাত হইল তাহা আজীবন অক্ষুন্ন ছিল।

পনেরো বৎসর বয়সে কার্লকে কলেজে পাঠানো হইল। কলেজের সমগ্র ব্যয় ভার বহন করিলেন ডিউক এবং প্রতিমাসে কিছু নির্দ্ধারিত ভাতাও বরাদ্দ করিয়া দিলেন। গ্যয়স প্রাচীন ও আধুনিক ভাষা এবং অঙ্কশাস্ত্র নিয়ে পড়িতে শুরু করিলেন। তিন বৎসর পরে কার্ল যখন গোটিঙগেন বিশ্ববিদ্যালয়ে প্রবেশ করিলেন তখন পর্যন্ত ভাষা না অঙ্কশাস্ত্র অধ্যয়ন করিবেন তাহা স্থির করিয়া উঠিতে পারিলেন না। অবশেষে ১৭৯৬ খৃষ্টাব্দের ৩০ শে মার্চ তারিখে অঙ্কশাস্ত্রের সপক্ষেই চূড়ান্ত ভাবে মন স্থির করিলেন। কেননা এই বিশেষ দিনটিতেই তিনি শুধুমাত্র একটি কম্পাস ও একটি মাপকাঠির সাহায্যে সতেরো দিক বিশিষ্ট বহুভুজ অঙ্কন করার পদ্ধতি আবিষ্কার করিয়াছিলেন। এমন কি বৃদ্ধ বয়সে যখন আরও অনেক গুরুত্বপূর্ণ বিষয়ে তাঁহার আবিষ্কার সমূহ অনন্য সাধারণ কৃতিত্বে ভাস্বর ও উজ্জ্বল, তখনও তিনি উক্ত আবিষ্কারকে তাঁহার জীবনের অন্যতম কীর্তি বলিয়া বিবেচনা করিতেন।

মার্চের ঐ বিশেষ দিন হইতেই তিনি অঙ্কবিষয়ক ডায়ারি রাখিতে শুরু করিলেন। অনইউক্লিডীয় জ্যামিতির নবতর সম্ভাবনা তিনি ইতিমধ্যেই অনুধাবন করিতে পারিয়াছিলেন। সংখ্যাতত্ত্ব ও পাটীগণিতে তিনি অসাধারণ ব্যুৎপত্তি অর্জন করিয়াছিলেন। এই সময় তিনি জটিল সংখ্যার রৈখিক প্রতিরূপ আবিষ্কারে এবং বীজগণিতের মৌলিক প্রতিজ্ঞা নির্ণয়ে ব্যাপৃত হইয়াছিলেন। গ্যয়সের যৌবনকাল নিউটনের মতই অপর্যাপ্ত পরিমাণে উৎপাদনক্ষম ও সৃজনশীল ক্ষমতার অধিকারী ছিল। তিনি বলিতেন প্রতিনিয়ত তাঁহার মনে এত অধিক সংখ্যক কল্পনা ভীড় জমাইত যে উহাদের অতি ক্ষুদ্র একাংশকেই তিনি কাজে লাগাইতে পারিতেন, আবার ঐগুলির মধ্যেও কেবলমাত্র কিছু ভগ্নাংশকেই চর্চা করিবার সময় পাইতেন।

একুশ বৎসর বয়সে কার্ল বিশ্ববিদ্যালয় হইতে বিদায় লইয়া ব্রান্সউইকে ফিরিয়া গেলেন। পিতার সঙ্গে মনোমালিন্য ঘটাতে তিনি পরিবার হইতে বিচ্ছিন্ন হইয়া আলাদা বসবাস করিতে লাগিলেন। এই সময় তিনি গুরুতর অর্থসঙ্কটে পড়িয়াছিলেন। কিন্তু ব্রান্সউইকের ডিউকের বদান্যতায় এই সঙ্কট হইতে তিনি পরিত্রাণ পাইলেন। অতঃপর তিনি গ্যোটিঙগেনে থাকা কালে সংখ্যাতত্ত্বের উপর যে নিবন্ধের পাণ্ডুলিপি শুরু করিয়াছিলেন তাহা শেষ করিতে নিবিষ্ট হইলেন এবং নিয়মিত ভাবে কয়েকমাস হেলম্স্টেডে আসা যাওয়া করিয়া লাইব্রেরীতে পড়াশুনো করিতে লাগিলেন। অবশেষে দীর্ঘ তিন বৎসর পরে ১৮০১ খৃষ্টাব্দে Disquisitiones Arithmeticae নামে নিবন্ধটি প্রকাশিত হইল। এই গ্রন্থটি প্রকাশিত হইবার সঙ্গে সঙ্গেই চতুর্দিকে গ্যয়সের খ্যাতি ছড়াইয়া পড়িল। উল্লিখিত গ্রন্থের সারমর্ম আলোচনা করা স্বল্প পরিসর এই নিবন্ধে সম্ভবপর নহে। গ্রন্থটির মূল বিষয়বস্তু সর্বসমতার তত্ত্বের উপর সরল ও তাৎপর্যপূর্ণ ব্যাখ্যা। Denbow ও Goedicke রচিত (Harper & Brothers প্রকাশিত) Foundation of Mathematics গ্রন্থের ৫৩৪-৪৪ পৃষ্ঠা সংখ্যায় দ্রষ্টব্য। উৎসাহী পাঠক বইটি পড়িয়া দেখিতে পারেন। কিছুদিন পরে তিনি আরো সংক্ষিপ্ত কিন্তু সমপরিমাণেই গুরুত্বপূর্ণ আর একটি প্রবন্ধ রচনা করিলেন। প্রবন্ধটির দীর্ঘ নামকরণ করিলেন: Demonstratio Nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus revolvi posse. ১৭৯৯ খৃষ্টাব্দে প্রবন্ধটি প্রকাশিত হইয়াছিল।

সংক্ষেপে এই আখ্যার অর্থ হইল গ্যয়স বীজগণিতের মৌলিক প্রতিজ্ঞার (fundamental theorem) প্রমাণ নির্ণয় করিয়াছিলেন। প্রত্যেকটি অখণ্ড মূলদ সমীকরণের একটি মাত্র চলে অন্ততঃ একটি করিয়া মূল থাকে; আরো সরল করিয়া বলিতে গেলে, এই প্রতিজ্ঞার অর্থ হইতেছে, যে কোন বীজগাণিতিক সমীকরণের অন্ততঃপক্ষে একটি মূল থাকিবেই। অনুসিদ্ধান্তটি সমপরিমাণেই আরও বেশী গুরুত্বপূর্ণ। প্রতিটি সমীকরণেরই অজ্ঞাত রাশির সর্বোচ্চ ঘাত যত হইবে ঠিক ততগুলি মূল থাকিবে। যেমন $x^4+2x^3+9=0$ ইহার মূল থাকিবে চারটি এবং এইভাবে

$x^3+x^2+2x+4=0$ র থাকিবে তিনটি। কোন কোন ক্ষেত্রে কিছু অথবা প্রত্যেকটি মূলই অভেদ হইবে কিন্তু তথাপি প্রত্যেকটিকেই আলাদা অস্তিত্ব (entity) হিসাবে গণ্য করিতে হইবে। ইহার কারণ হইল সপ্তদশ শতাব্দীর প্রারম্ভেই দেখান হইয়াছিল যদি $x-a$ সমীকরণের একটি উৎপাদক হয়, তাহা হইলে a হইতেছে সমীকরণের একটি মূল। উদাহরণস্বরূপ দেখান যাইতে পারে $x^2-6x+9=0$ কে $(x-3)\ (x-3)=0$ এই উৎপাদকে পরিণত করা যায়। যে কোন সমীকরণেই এই সম্পর্ক সত্যবদ্ধ। ইহার মূল অভিন্নরূপে ৩ এবং ৩ হইতেছে। ইহারা যদিও অভেদ, তথাপি প্রত্যেকটিকে আলাদা ভাবেই গণিতে হইবে।

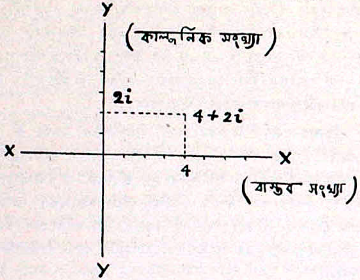
মৌলিক প্রতিজ্ঞার প্রমাণ নির্ণয় করতঃ কার্ল বীজগণিতকে সুসম্বদ্ধ ও বীজগাণিতিক নিয়মাবলীকে সাধারণ সংজ্ঞার অন্তর্ভুক্ত করিয়া সহজবোধ্য করিয়া তুলিয়াছিলেন। প্রতিটি বীজগাণিতিক সমীকরণেরই অন্ততঃ একটি করিয়া মূল রহিয়াছে এই কথা প্রমাণ করিবার জন্য তাঁহাকে সংখ্যারীতির সম্পূর্ণতা সাধন সম্পর্কে সুনিশ্চিত হইতে হইয়াছিল। উদাহরণস্বরূপ ধরা যাক, যদি অমূলদ সংখ্যাকে সমীকরণ হইতে বাদ দেওয়া হয় তাহা হইলে কেবল মাত্র অমূলদ মূল লইয়া সমাধান অসম্ভব হইয়া উঠিবে এবং প্রত্যেক সমীকরণেরই যে অন্ততঃ একটি করিয়া মূল থাকে তাহাও অসত্য হইবে।

ধনাত্মক, ঋণাত্মক, মূলদ ও অমূলদ প্রভৃতি যে সকল সংখ্যা লইয়া বাস্তব রাশিমালা গঠিত হয় তাহা দ্বারা কি সংখ্যারীতির সম্পূর্ণতা সাধিত হয়? না তাহা হইতে পারে না। একটি সরল সমীকরণ যথা $x^2+4=0$ কেবল মাত্র বাস্তব সংখ্যা দ্বারা সমাধানের অসাধ্য হইয়া উঠিবে। কেননা ইহার উত্তর হইবে $x=\pm\sqrt{-4}$, অথবা $x=\pm 2\sqrt{-1}$। ম্যুলার বলিয়াছেন "…$\sqrt{-1}$ এবং $\sqrt{-2}$ এইরূপ রাশিমালা কাল্পনিক সংখ্যা, কেননা উহারা ঋণাত্মক রাশিমালার মূলের প্রতিনিধিত্ব করিতেছে। সুতরাং ঐরূপ রাশিমালা সম্পর্কে আমরা স্থির নিশ্চিত ভাবে বলিতে পারি বাস্তব রাশিমালার মধ্যে এইরূপ সংখ্যার কোন বিদ্যমানতা নাই।" যাহাই হউক গ্যয়স এ'কথা বিশ্বাস করিতেন যে, একটি বিদ্যমানতাকে, ঋণাত্মক রাশিমালার মত কাল্পনিক সংখ্যার উপরেও আরোপ করা যাইতে পারে এবং সংখ্যারীতিতে তিনি এই প্রস্তাবকে স্বীকার করিয়া লইয়াছিলেন।

কেবল মাত্র স্বীকারই করেন নাই অধিকন্তু কাল্পনিক সংখ্যা বাস্তব সংখ্যার মতই লেখচিত্রে অঙ্কিত হইতে পারে ইহা প্রমাণ করিয়া উপরোল্লিখিত মূল সূত্রগুলিকে দৃঢ় ভিত্তিনীতির উপর সুপ্রতিষ্ঠিত করিয়াছিলেন।

পরের পৃষ্ঠার চিত্রটিতে x অক্ষটি বাস্তব সংখ্যাকে নির্দেশ করিতেছে এবং y অক্ষ কাল্পনিক সংখ্যাকে নির্দেশ করিতেছে। এখন $2\sqrt{-1}$ কে অঙ্কন করিতে হইলে কেবলমাত্র y অক্ষ এর বরাবর দুটি একক (unit) দিতে হইবে। গ্যয়স $\sqrt{-1}$ এই কাল্পনিক সংখ্যাকে নির্দেশ

করিতে "i" অর্থাৎ কাল্পনিক সংখ্যা এই চিহ্নটির প্রবর্তনা করিয়াছেন। এখন $2\sqrt{-1}$ কে $2i$ লিখিলেও চলে। $\sqrt{-2}$ কে $i\sqrt{2}$ লেখা যাইতে পারে। কাল্পনিক ও বাস্তব সংখ্যার



সংযুক্তিতে $4+2i$ এইভাবে অঙ্কিত হইতে পারে। উপরের চিত্রটিতে বাস্তব ও কাল্পনিক সংখ্যা এক একটি বিন্দুকে নির্দেশ করিতেছে যাহাকে গ্যয়স একটি ভিন্ন ধরনের সংখ্যা হিসাবে বিবেচনা করিয়া জটিল সংখ্যা বলিয়া আখ্যায়িত করিয়াছেন। এই জটিল সংখ্যাগুলি হইতেই অন্যান্য সকল সংখ্যার উৎপত্তি। অর্থাৎ যে কোন বাস্তব সংখ্যাই আদতে $a+bi$ নিয়মে জটিল সংখ্যা রূপে পরিগণিত হইতে পারে। এখানে আমরা দেখিতেছি a বাস্তব b শূন্য; আবার যে কোন কাল্পনিক সংখ্যাই উক্তরূপ জটিল সংখ্যা, যেখানে a হইতেছে শূন্য এবং b হইতেছে বাস্তব। রাশিমালা, চৌহদ্দি (domain) অথবা ক্ষেত্র (field) যে পদেই অগ্রাধিকার দেওয়া হউক না কেন আমরা নিম্নবর্ণিত চিত্রাঙ্কন করিয়া দেখাইতে পারি :

[১] অজ্ঞেয় সংখ্যা সমূহ বীজগণিতের অধীন নহে বলিয়া এখানে আলোচনা করা হইল না।

অবশ্য এই সংখ্যাগুলির যে কোনটিই ঋণাত্মক অথবা ধনাত্মক হইতে পারে। জটিল সংখ্যা স্বীকৃতি লাভের ফলে শুধু বীজগণিতই লাভবান হয় নাই উপরন্তু জ্যামিতি এবং বিশ্লেষণ প্রণালীও সমধিক উপকৃত হইয়াছে। জটিল চলের অপেক্ষক সূত্রেরও উন্নতিবিধান ঘটিয়াছে। ধ্রুব পারস্য ব্যবকলনধর্মী জ্যামিতি এবং ভেক্টর বিশ্লেষণ যাহা আধুনিক বিজ্ঞানের অতীব গুরুত্বপূর্ণ ও অপরিহার্য অঙ্গ বলিয়া বিবেচিত হয়, তাহা ঐ সকল অর্ধ বাস্তব ও অর্ধ কাল্পনিক সংখ্যা হইতেই উদ্ভূত হইয়াছে।

জটিল সংখ্যাকে যোগ বিয়োগ গুণ ভাগ এবং ঘাতে উন্নীত বা মূল নির্ণয় করা যাইতে পারে। প্রতি ক্ষেত্রেই $a+bi$ নিয়মে একটি জটিল সংখ্যার ফলস্বরূপ a, b কিংবা উভয়েই শূণ্য হইতে পারে। জটিল সংখ্যার উপর কাজ করার জন্য কোন নতুন সংখ্যা উদ্ভাবন করিতে হইবে না। জটিল সংখ্যার স্বীকৃতি লাভের ফলে সমগ্র বীজগণিত যেন এক লক্ষ্যে আসিয়া পৌছিল এবং যে কোন বীজ-গাণিতিক সমীকরণ সমাধান ও বীজগণিতে সকল রকমের কাজ করা সম্ভব হইয়া উঠিল। পিথাগোরাসের সময় হইতেই মানুষ এতাবৎ কাল এই লক্ষ্যে পৌছাইবার জন্য আপ্রাণ চেষ্টা করিতেছিল। অনুরূপ প্রচেষ্টা বিজ্ঞানের অন্যান্য শাখায়ও চলিতেছিল। রাসায়নিকরা রসায়নে সংখ্যার অনুরূপ যাবতীয় উপাদান বা অনুক বাহির করিবার জন্য চেষ্টা করিতেছিলেন। এখন পর্যন্ত ১১১টী মৌল উপাদান বা অনুক আবিষ্কৃত হইয়াছে এবং উহাদের বিশেষভাবে চিহ্নিত করা হইয়াছে। পদার্থবিজ্ঞানীগণ অপরপক্ষে পদার্থের মৌল একক কি এই প্রশ্নের উত্তর খুঁজিতেছিলেন। প্রথমে তাহাদের বিশ্বাস ছিল, অণু অবিভাজ্য একক—কিন্তু পরে দেখা গেল অণু ইলেকট্রন, প্রোটন ও নিউট্রন সহযোগে প্রস্তুত হইয়াছে। অবশ্য ইহাই সম্পূর্ণ তালিকা নহে। কেননা আরও নতুন নতুন পদার্থ কণিকা যেমন এ্যান্টিপ্রোটনস, পজিট্রন, নিউট্রিনস প্রভৃতি এই তালিকার অন্তর্ভুক্ত হইয়াছে। হয়তো আবার নতুন করিয়া এইগুলির সঙ্গে আরও পদার্থ কণিকা যোগ হইবে কিংবা এইগুলিকে বিভাজ্য করিয়া আরও নতুন পদার্থ আবিষ্কৃত হইবে। অঙ্কশাস্ত্রের 'অবসানের জন্য গাণিতিক অনুসন্ধান এই সকল লক্ষ্যের সঙ্গে সম্পর্কিত ছিল এবং এই বিষয়ে গ্যয়স চূড়ান্তভাবে কৃতকার্য হইয়াছিলেন।

গ্যয়সের নিকট ব্যক্তিগতভাবে গুরুত্বপূর্ণ একটী ক্ষুদ্র আবিষ্কারের কথা এইখানে উল্লেখযোগ্য। গ্যয়সের মা গ্যয়সের জন্ম তারিখ জানিতেন না। "এ্যাসেনশনের" [২] আট দিন আগে গ্যয়স জন্ম-গ্রহণ করিয়াছিলেন শুধু এইটুকু তাঁহার মনে ছিল। ১৮০০ খৃষ্টাব্দে গ্যয়স বিশেষ নিয়ম স্থির করিয়া ইস্টারের তারিখ নির্দ্ধারণ করিলেন। পরে উক্ত তারিখের সাহায্যে তিনি নিজের জন্ম তারিখ, তথা ৩০শে এপ্রিল বাহির করিয়াছিলেন।

এই সময় হেলমস্টেড বিশ্ববিদ্যালয় হইতে গবেষণামূলক প্রবন্ধের জন্য গ্যয়স ডক্টরেট পাইলেন। তখন তিনি অধিকাংশ সময়ই Disquisitiones Arithmeticae এর পাণ্ডুলিপি প্রণয়নে

[২] খৃষ্টের মৃত্যুর তিন দিন পরে সমাধি হইতে উত্থান ও স্বর্গারোহণ দিবস।

ব্যাপৃত ছিলেন। একবার তিনি শিক্ষকতার কার্য গ্রহণ করিবেন এই ভাবিয়া The Metaphysics of Mathematics এই নাতিদীর্ঘ প্রবন্ধটি রচনা করিলেন। অঙ্কশাস্ত্রের প্রধান ভিত্তির উপর এত সরল এবং প্রাঞ্জল আলোচনামূলক প্রবন্ধ ইতিপূর্বে আর কেহই রচনা করেন নাই। অঙ্কের অধিবিদ্যা না বুঝিতে পারায় অনেকেরই ধারণা অঙ্কশাস্ত্র অত্যন্ত কঠিন ও দুঃসাধ্য বিষয়। গ্যয়সের হাতে এই বিষয় অত্যন্ত সরল ও ব্যঞ্জনাময় হইয়া উঠিয়াছিল। তিনি অঙ্কশাস্ত্রের প্রাথমিক শিক্ষার্থীদের দিকে চক্ষু রাখিয়াই এই প্রবন্ধটী রচনা করিয়াছিলেন।

অঙ্কশাস্ত্রের সমগ্র জটিল ও দুর্বোধ্য ক্রিয়াপ্রণালী, প্রতিজ্ঞাকে পরিহার করিয়া কেবলমাত্র অঙ্কশাস্ত্রের মৌলিক তাৎপর্যগুলিকে বিশ্লেষণ করিবার মানসেই তিনি এই প্রবন্ধটি রচনা করিয়াছিলেন।

জ্যামিতি ও গণিতের সাধারণ্যে গৃহীত মূলসূত্রগুলির প্রতি তাঁহার অদম্য সমালোচনামূলক বিশ্লেষণ তাঁহার চরিত্রের অন্যতম বৈশিষ্ট্য ছিল এবং সম্ভবতঃ গাণিতিক প্রতিভার প্রভব ছিল। ১৭৯২ খৃষ্টাব্দের প্রারম্ভে যখন গ্যয়সের বয়স মাত্র ১৫ বৎসর, তখনই তিনি ইউক্লিডের তলের সংজ্ঞা সমান্তরাল ও স্বতঃসিদ্ধ সরল রেখার উপর সন্দেহ প্রকাশ করিয়াছিলেন। এই বিষয়ে তাঁহার গবেষণা খ্যাতি প্রতিপত্তির জন্য যথেষ্ট হইলেও কিন্তু গ্যয়স কখনও এই উল্লেখযোগ্য আবিষ্কারের কথা তাঁহার জীবৎকালে প্রকাশ করেন নাই। অনিশ্চিত স্বতঃসিদ্ধ এবং গতানুগতিক সমতলকে বাদ দিয়া তিনি অনইউক্লিডীয় জ্যামিতি আবিষ্কার করিয়াছিলেন। The Metaphysics of Mathematics প্রবন্ধে তিনি কোন নতুন আবিষ্কারের কথা ঘোষণা করেন নাই, কেবল কতকগুলি বিশৃঙ্খলতাকে নিয়মের বশে আনিয়াছিলেন। অঙ্কশাস্ত্র মানগুন্যতার মধ্যে সম্পর্ক নিয়া কাজ করে এই বলিয়া তিনি অঙ্কশাস্ত্রের সংজ্ঞা নিরূপণ করিয়াছিলেন এবং কিরূপে এই সম্পর্ক নির্দ্ধারিত অথবা নির্মিত হয় তাহা চিত্রিত করিয়াছিলেন। মানগুন্যতাকে তিনি দুই ভাগে বিভক্ত করিয়াছিলেন। প্রথমটি ব্যাপক অথবা ব্যাপন স্থল মানগুন্যতা অর্থাৎ যাহা রেখা ঘন ও কোণসমূহ লইয়া গঠিত হইয়াছে, দ্বিতীয়টি তীব্র মানগুন্য যথা বেগ ও ঘনত্ব যাহা ব্যাপক মানগুন্যর উপর নির্ভরশীল। বেগ মানগুন্য হিসাবে স্থানের উপর নির্ভরশীল। স্থানের এই বিন্দু হইতে ঐ বিন্দু পর্যন্ত যাইবার সময়কাল ধরিয়া ইহার পরিমাপ করা হয়।

গ্যয়স বলিয়াছেন কেবলমাত্র মানগুন্য অধ্যয়ন সম্ভব নহে। সাধারণভাবে, একটি রেখার ভিতর অনুসন্ধান বা পর্যবেক্ষণ করিবার মত কিছুই থাকে না, কিন্তু উহার পাশে আর একটি লাইন টানিলেই নিশ্চিত কিছু পর্যবেক্ষণ সম্ভব হইয়া উঠে। দৈর্ঘ্য ও লক্ষ্যপথ তুলনা করা যায়, কোণগুলি মাপা যায় এবং অন্যান্য সম্পর্কগুলিকেও পর্যবেক্ষণ করা যায়। এই ভাবে অঙ্কশাস্ত্র মানগুণ্য কিরূপে পরস্পরের মধ্যে সম্পর্কিত হয় তাহা বিবেচনা করিয়া দেখে।

পাটীগণিত কেবলমাত্র মানগুণ্যের পরস্পরের মধ্যে সম্পর্ক পর্যবেক্ষণ করে, জ্যামিতিও তাহাই করে উপরন্তু পরস্পরের প্রতি মানগুণ্য সম্পর্কের অবস্থানকেও নির্দেশ করে। প্রাচীন

কালে গ্রীসিয়রা খাঁটি জ্যামিতিক পদ্ধতিকে অগ্রাধিকার দিতেন। মধ্যযুগে আরবীয়দের দ্বারা প্রভাবান্বিত হইয়া এই পদ্ধতি পরিবর্তিত রূপে পাটীগাণিতিক পদ্ধতির প্রচলন করিল। যদিও জ্যামিতিক সম্পর্ক বিশুদ্ধ রূপে অবস্থিতি সংক্রান্ত তথাপি অনুশীলন করিতে হইলে পাটীগাণিতিক পদ্ধতি দ্বারাই আরম্ভ করিতে হইবে। অবস্থিতি সম্পর্ককে ত্রিকোণমিতি, পাটীগাণিতিক পদেই বর্ণনা করে। জ্যামিতিক পদ্ধতি হইতে পাটীগাণিতিক পদ্ধতিকে আধুনিক কালে যে অগ্রাধিকার দেওয়া হয়, গ্যয়স সঠিকভাবেই ইহার নির্দেশ করিয়াছিলেন। গ্রীসিয়রা ইহা জানিতেন না কিম্বা ঐ সময় উক্ত পদ্ধতির প্রচলন ছিল না। কষ্টসাধ্য জ্যামিতিক পদ্ধতি হইতে অধিকতর ফলপ্রদ সংখ্যারীতি দ্বারা পাটীগাণিতিক পদ্ধতির শ্রেষ্ঠত্ব প্রমাণিত হইয়াছে।

মানগুন্যর বিভিন্ন সম্পর্কের পর্যবেক্ষণে অঙ্কশাস্ত্র অসীমের ব্যবহার অন্তর্ভূক্ত সম্পর্ক এবং যে গুলিতে ঐ সম্পর্ক অনুপস্থিত সেই সম্পর্কের মধ্যে মূলগত পার্থক্য নির্ণয় করিয়াছে। পূর্বোল্লিখিত সম্পর্ককে উচ্চতর গণিতের সংশ্লিষ্ট বলিয়া বিবেচনা করা হয় এবং পরবর্তী সম্পকর্কে নিম্নতর গণিতের অঙ্গীভূত বলিয়া উল্লেখ করা হয়। এইগুলির প্রত্যেক ক্ষেত্রেই আরও পার্থক্য দেখানো হইয়াছে। বিভিন্ন প্রকার সম্পর্ক মানগুন্যর ভিতর বিদ্যমান থাকিতে পারে। তাহাদের মধ্যে প্রধান হইতেছে খণ্ডের সহিত অখণ্ডের সম্পর্ক। যোগ হইতেছে কতকগুলি অংশকে একত্রে মিলাইয়া একটি সমগ্র গঠন; এবং সমগ্রকে ভাঙ্গিয়া যে দুইটি অংশ পাওয়া যায় তাহাই বিয়োগ। অন্যান্য সকল ক্রিয়া প্রণালীই যোগ কিংবা বিয়োগের অভিযোজন।

গ্যয়সের The Metaphysics of Mathematics প্রবন্ধে মূল বক্তব্য বিষয়ের প্রকৃতি ছিল: অঙ্কশাস্ত্রকে যতদূর সম্ভব সুস্পষ্ট ভাবে বর্ণনা করা এবং উহার ভিত্তিভূমির অনুসন্ধানে একটি সামগ্রিক আন্দোলনের ফলশ্রুতিকে ভবিষ্যদ্‌বাণী করা। কিন্তু এই আন্দোলনই পরিশেষে অত্যন্ত জটিল ও বাহুল্যপুর্ণ, এবং আদৌ সুস্পষ্ট নয় বলিয়া গ্যয়সের সুস্পষ্ট বর্ণনাসমূহের অধিকাংশকেই প্রত্যাখ্যান করিয়াছিল।

বার্টরাণ্ড রাসেল এবং আলফ্রেড নর্থ হোয়াইটহেড কৃত, অধিকাংশ লোকের অপঠিত গ্রন্থ Principia Mathematica তে সকল প্রকার আগাছা জঞ্জাল দূরীভূত করিয়া অঙ্কশাস্ত্রকে একমুঠো বীজে রূপান্তরিত করিয়া এবং পরে ঐ সকল বীজের মৌলিক বৈশিষ্ট্যগুলির সম্যক বিশ্লেষণ করা, বোধ হয় এই বিষয়ে সর্বাপেক্ষা সুবিদিত এবং উচ্চাকাঙ্ক্ষী প্রচেষ্টা ছিল।

তাঁহাদের লক্ষ্য ছিল প্রধানতঃ অঙ্কশাস্ত্র হইতে অনাবশ্যক বাহুল্যকে নির্মূল করিয়া, অঙ্কশাস্ত্রকে কিছু মৌলিক স্বতঃসিদ্ধে রূপান্তরিত করিয়া, মূলতত্ত্ব গুলিকে প্রতিষ্ঠিত করা এবং মূলতত্ত্বগুলির বৈশিষ্ট্য নিরূপিত করা। ইংরেজি বর্ণমালার ২৬টি অক্ষর যেমন বিভিন্ন প্রকার সমন্বয়ে সমগ্র সাহিত্যের উৎস হিসাবে কাজ করে তেমনি উপরোক্ত স্বতঃসিদ্ধগুলির উপর নির্ভর করিয়া, বিভিন্ন প্রকার সংযুক্তির মাধ্যমে অঙ্কশাস্ত্রের সমগ্র কাঠামো গড়িয়া উঠিতে সক্ষম হইবে। ইহাকে ফলপ্রসূ করিবার জন্য কেবলমাত্র অভিজ্ঞতাপ্রসূত এবং মানিয়া লওয়া জিনিষগুলি—তাহা যতই

স্বতঃপ্রতীয়মানই হউক না কেন, অঙ্কশাস্ত্র হইতে সম্পূর্ণরূপে বিদূরিত করিতে হইবে। যেমন, বস্তুকে সংখ্যায়িত করিবার জন্য মানুষের প্রচেষ্টা হইতেই সংখ্যার উৎপত্তি হইয়াছিল এবং সেই জন্যই বিশুদ্ধ ভাবে স্বতঃসিদ্ধ মূলের দৃঢ় ভিত্তিতে এই সংখ্যাতত্ত্ব প্রতিষ্ঠিত না হইলে উহাদিগকে অঙ্কশাস্ত্রের অন্তর্ভুক্ত করা সম্ভবপর নহে। ইউক্লিডের স্বতঃসিদ্ধগুলি লুক্কায়িত ও অনুল্লিখিত জটিল গঠনকৌশল মাত্র। এতদ্‌সত্ত্বেও, রাসেল ও হোয়াইটহেডের স্বতঃসিদ্ধগুলির আপাত সরলতা সত্ত্বেও, সন্দেহ হয় যে, ঐগুলি প্রকৃতপক্ষে অঙ্কশাস্ত্রের মৌলিক উপাদান হইতে পারে কিনা কিম্বা ঐ ধরণের কোন মৌলিক স্বতঃসিদ্ধ প্রণয়ন করা আদৌ সম্ভবপর কিনা?

ইউক্লিডের "স্বতঃপ্রতীয়মান" স্বতঃসিদ্ধগুলিতে ত্রুটি পরিলক্ষিত হওয়াতেই সেইগুলিকে নতুন করিয়া নিরীক্ষাকল্পে অঙ্কশাস্ত্রের পুঙ্খানুপুঙ্খ বিশ্লেষণের অনুপ্রেরণা ঘটিয়াছিল। গ্যয়স বহু পূর্বেই এই ত্রুটিগুলি লক্ষ্য করিয়াছিলেন বলিয়াই গাণিতিক কাঠামোকে সন্দেহ ও সতর্কতার সহিত পর্যবেক্ষণ করিতেন। এমনকি তিনি অবিসম্বাদী সত্যরূপে পরিগণিত ত্রি-মাত্রিক আয়তনের অস্তিত্ব লইয়াও প্রশ্ন তুলিয়াছিলেন। তিনি বলিয়াছিলেন, কেবলমাত্র দ্বি-মাত্রিক আয়তনই বুঝিতে সক্ষম এক রকম প্রাণী যেমন আমরা কল্পনা করিতে পারি, আমাদের অপেক্ষা উচ্চস্তরের কোন প্রাণীও ঠিক তেমনি আমাদের প্রতি এবং ত্রি-মাত্রিক আয়তন সম্বন্ধে অবজ্ঞা প্রকাশ করিতে পারে। যেহেতু, মানুষ কেবলমাত্র ত্রি-মাত্রিক আয়তনই কল্পনা করিতে পারে, ইহার অর্থ এই নয় যে, উচ্চতর মাত্রা বিশিষ্ট আয়তনে অস্তিত্বের বিদ্যমানতা সম্ভব নহে। এইরূপে সমগ্র বিদ্যমানতার পরিমিত অংশ আমাদের ইন্দ্রিয়গোচর হইতে থাকে। মনন এবং বোধের সমন্বয়ে এই পরিমিতি গড়িয়া ওঠে। বাস্তবতা কেবল মাত্র দৃশ্যমান যাহা, তাহার অধিক কিছুই নহে অর্থাৎ আমাদের দৃষ্টিগোচর সীমিত বাস্তবতা মাত্র, কিন্তু মানব মন ঐ সীমিত বাস্তবকে অতিক্রম করিয়াও কল্পনা করিতে পারে, যাহাতে আমরা দেখিতে পাইব আমাদের কল্পনার বাহিরেও বাস্তবতার অবস্থান সম্ভব। পরবর্তী কালে কেয়িলি দেখাইয়াছেন, "ঐ একই মানব মন গাণিতিক প্রতীকের সাহায্যে কল্পনা বহির্ভূত বাস্তবের সন্ধান করিতে সক্ষম হয় এবং ত্রিমাত্রিক পরিমণ্ডলে সীমাবদ্ধ হওয়া সত্ত্বেও অঙ্কের সাহায্যে চার কিংবা পাঁচ বা n মাত্রিক কাঠামোতে বিচরণ করিতে পারে।"

অঙ্কশাস্ত্র জ্যামিতির অচিন্তনীয় অগ্রগতির সঙ্গে রুদ্ধ হয় নাই। বিংশ শতাব্দীর বিজ্ঞানে, সমগ্র প্রপঞ্চ ও ঘটনা নিচয়কে চাক্ষুষ রূপদানে অসমর্থতার পশ্চাতে, এই প্রবণতাই কাজ করিতেছে। পারমাণবিক ও নিখিল জ্যোতির্বিজ্ঞানে অধিকাংশ ঘটনাকেই কেবল মাত্র কতকগুলি সমীকরণ ব্যতীত অন্য কিছু দ্বারা প্রকাশ করা অসম্ভব হইয়া উঠিয়াছে। চিত্তগত রূপায়নকে পরিহার করার আধুনিক প্রবণতার মূলে দুইটি কারণ নিহিত রহিয়াছে। প্রথমতঃ অনেক ক্ষেত্রেই এই ধরণের চিত্রায়ণ প্রকরণ সম্ভব নহে; দ্বিতীয়তঃ, এইরূপ চিত্র সমন্বিত উপস্থাপনা সন্দেহাতীত ভাবে প্রমাদ বিহীন নহে। প্রমাণ স্বরূপ উল্লেখ করা যায় যে ইউক্লিডের অঙ্কচিত্রগুলি জ্যামিতিকে

শুধুমাত্র সহজ ও সরল করিয়াই ক্ষান্ত হয় নাই অনেক অবর্ণিত, অস্বচ্ছ, ধরিয়া লওয়া ধারণা বা বস্তু দ্বারা আবৃত করিয়া রাখিয়াছিল।

গ্যয়স যে অনইউক্লিডীয় জ্যামিতি আবিষ্কার করিয়াছিলেন, তাহা, মনুষ্যচিন্তার ইতিহাসে চমকপ্রদ ও বৈপ্লবিক ধারণা সমূহের অন্যতম ছিল। কিন্তু, নিউটনের মত গ্যয়স বিতর্কমূলক কিছুকে এড়াইয়া চলিতেন। তাঁহার মৃত্যুর পর এই আবিষ্কারের কথা তাঁহার নোট বই হইতে জানা গিয়াছিল। তাঁহার পরবর্তী সিদ্ধান্ত নিতান্ত দুঃখজনক ঘটনা হইলেও ক্ষমার্হ। ২৪ বৎসর বয়সে তিনি বিশুদ্ধ গণিতে গবেষণা পরিত্যাগ করিয়া জ্যোতির্বিজ্ঞান নিয়া পড়াশুনো করিতে আরম্ভ করিলেন। অবশ্য প্রতিভার এই অপব্যবহারে তাহার নিজের কোন ত্রুটি ছিল না। কেননা উপযুক্ত চাকুরি লাভে অসমর্থ হইয়া এবং আর্থিক অনটনে বিপর্যস্ত হইবার দরুণই তিনি অধিকতর অর্থ উপার্জ্জনের সম্ভাবনায় ও বিদ্বৎসমাজের স্বীকৃতি লাভের আশায় জ্যোতির্বিজ্ঞানকে বাছিয়া লইয়াছিলেন। তৎকালে বহু ক্ষুদ্র গ্রহ এবং গ্রহাণুপুঞ্জ আবিষ্কৃত হইয়াছিল—গ্যয়স অঙ্কশাস্ত্রের সাহায্যে সেইগুলির কক্ষপথ নির্ণয় করিতে সচেষ্ট হইলেন। ১৮০১ খৃষ্টাব্দে তিনি তাঁহার এই ধরণের আবিষ্কারের কথা প্রথম ঘোষণা করিলেন। এই কাজের জন্য তিনি বিদ্বৎসমাজের সপ্রশংস অভিনন্দন পাইলেন। সেণ্ট পিটার একাডেমী অফ সায়েন্স তাঁহাকে আজীবন সদস্য পদে নির্বাচিত করিলেন এবং উক্ত সংস্থা পরিচালিত মানমন্দিরের পরিচালক পদ গ্রহণের জন্য প্রস্তাব করিলেন। কিন্তু গ্যয়স ব্রান্সউইকের ডিউকের অনুরোধে এই প্রস্তাব প্রত্যাখ্যান করিলেন। ডিউক গ্যয়সের ভাতা বাড়াইয়া দিলেন উপরন্তু ব্রান্সউইকেই তাঁহার গবেষণার জন্য একটি মানমন্দির নির্মাণ করিয়া দিবেন বলিয়া আশ্বাস দিলেন। এই সময়ে গ্যয়সের ওপর ইউরোপের তৎকালীন শ্রেষ্ঠ গণিতবিদ্‌দের দৃষ্টি ন্যস্ত হইল। তাহাদের অনেকেই গ্যয়স যাহাতে গ্যোটিঙগেন বিশ্ববিদ্যালয়েই নিযুক্ত হইতে পারেন সেই চেষ্টা করিতে লাগিলেন। গ্যয়স তখন ব্রান্সউইকে জ্যোতির্বিজ্ঞানের ওপর গবেষণা চালাইতেছিলেন। ১৮০৫ খৃষ্টাব্দের ৯ই অক্টোবর ছাব্বিশ বৎসর বয়সে তিনি সমৃদ্ধশালী জনৈক চর্মব্যবসায়ীর কন্যা যোহান্না অসথফকে বিবাহ করিলেন এবং এক বৎসরের মধ্যেই তাঁহাদের প্রথম সন্তান জন্ম গ্রহণ করে। গ্যয়স পূর্ণোদ্যমে নিজের কাজ করিয়া যাইতে লাগিলেন। কালক্রমে তাঁহার খ্যাতি জার্মানীর সীমিত গণ্ডী ছাড়াইয়া সুদূর রাশিয়া পর্যন্ত ব্যাপ্ত হইয়া পড়িল।

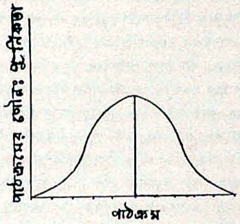
১৮০৬ খৃষ্টাব্দের ১০ই নভেম্বর তারিখে ব্রান্সউইকের ডিউক পরলোক গমন করিলেন এবং গ্যয়স, প্রিয় বন্ধু ও শুভাকাঙ্ক্ষীর মৃত্যুতে গভীর শোকে মুহ্যমান হইয়া পড়িয়াছিলেন। এক বৎসর পরে, মানমন্দিরের পরিচালক নিযুক্ত হইয়া গ্যয়স স্ত্রীপুত্র সঙ্গে করিয়া গ্যোটিঙগেনে চলিয়া গেলেন। ডিউকের মৃত্যুর প্রায় সঙ্গে সঙ্গেই গ্যয়সের জীবনে অবিশ্বাস্য রকমের দুর্ভাগ্য ও দুঃখজনক ঘটনার সূত্রপাত হইল। তিন বৎসরের মধ্যে তাঁহার পিতা, প্রিয় কাকা যোহান বেনজ, স্ত্রী এবং তৃতীয় ও কনিষ্ঠ সন্তান সকলেই একে একে মৃত্যু বরণ করিলেন। উপরন্তু তিনি পুনরায় আর্থিক সঙ্কটের সম্মুখীন হইলেন কেননা গ্যোটিঙগেনে তিনি সামান্য বেতন পাইতেন, এছাড়া ডিউকের কাছ হইতে এতকাল

যাবৎ, যে ভাতা পাইয়া আসিতেছিলেন ইতিমধ্যে তাহাও বন্ধ হইয়া গিয়াছিল। বন্ধুবান্ধব ও আত্মীয়-স্বজনেরা অন্য জায়গায় আরো বেশী অর্থ উপার্জনের চেষ্টা না করিয়া, গবেষণা করিয়া বৃথা সময় নষ্ট করিবার মত নির্বুদ্ধিতা ও মূঢ়তার কঠোর সমালোচনা করিতে লাগিলেন। এই সকল কারণে গায়স এত হতাশ হইয়া পড়িয়াছিলেন যে তিনি ডায়ারিতে লিখিয়াছিলেন "এইরূপে জীবন ধারণের চেয়ে আমার কাছে মৃত্যুই অধিকতর প্রিয় এবং কাম্য।" নিদারুণ একাকীত্ব এবং নৈরাশ্যের দুঃসহ ভার বহনে অপারগ হইয়া ছয় মাস পরে ১৮১০ খৃষ্টাব্দের ৪ঠা আগস্ট পুনর্বার গ্যোটিঙগেনের এক অধ্যাপক কন্যা ফ্রেডরিকা উইলহেলমিনা ওয়াল্ডেকে বিবাহ করিলেন। পরবর্তী ছয় বৎসরের মধ্যে তাঁহাদের তিনটি সন্তানের জন্ম হইল। ইহার পর মিনা গায়স যক্ষ্মারোগে আক্রান্ত হইলেন। গায়স রুগ্না স্ত্রীর সেবাশুশ্রূষা করিতেন, ছেলেমেয়েদের দেখাশোনা করিতেন। বিধবা মাকেও তিনি নিজের কাছে আনাইয়া লইয়াছিলেন। মায়ের প্রতি তাঁহার কর্তব্যনিষ্ঠা এবং অনুরাগ অত্যন্ত গভীর ছিল।

ইতিমধ্যে তিনি জিওড্যাসীয় নিরীক্ষায় অনেকদূর অগ্রসর হইয়াছিলেন ১৮২০ খৃষ্টাব্দ হইতে ১৮৩০ খৃষ্টাব্দ পর্যন্ত দশ বৎসর কাল তিনি জিওড্যাসীর ওপর কাজ করিয়াছেন। এই কাজের সামগ্রিক গাণিতিক পরিণাম বর্ণনা করা অসম্ভব। ডিফারেনশিয়াল জ্যামিতি (Differential Geometry) তলমাত্রা তত্ত্ব (theories of surfaces) পরিসংখ্যান (statistics) সম্ভাব্যতার সূত্র (theory of probability) তিনি এইগুলি প্রত্যেকটিরই উন্নতি সাধন করিয়াছিলেন এবং অন্যান্যগুলিও এই জিওড্যাসীয় কার্যক্রমের উপাঙ্গস্বরূপ ছিল। উদাহরণস্বরূপ বলা যাইতে পারে সম্ভাব্যতার সূত্র তে তাঁহার অবদান সহস্র নিরীক্ষা এবং নিরবচ্ছিন্ন অনুসন্ধানের মাধ্যমেই আসিয়াছিল। মানুষের দৃষ্টি অভ্রান্ত নয় বলিয়া প্রতিটি নিরীক্ষা বা পাঠক্রমকে (reading) বারংবার পর্যবেক্ষণ করিতে হইয়াছে। প্রায়শঃই ভিন্ন ফল পাওয়া গিয়াছে। "ন্যূনতম বর্গ" (least square) যে নিয়ম তিনি বাল্য বয়সেই আবিষ্কার করিয়াছিলেন তাহা প্রয়োগ করিয়া কোন পাঠক্রমটি (reading) সম্ভাব্য শুদ্ধ তাহা নির্ণয় করিতে পারিতেন। ইহা ছাড়াও পাঠক্রমের ফল দ্বারা রেখাচিত্র অঙ্কণ করিয়া দেখাইতেন যে ইহা সর্বদা ঘণ্টাকৃতি বক্ররেখায় (চিত্র দ্রষ্টব্য) পরিণত হয়। ইহাকে গায়সীয় বক্র রেখা বলা হয়। কেন্দ্রের বাম প্রান্তে অর্দ্ধেক প্রমাদ অবস্থান করে। এক কথায় প্রমাদ বিস্তারিত সংস্থান (Distribution of errors) সর্বদা একটা ছক (pattern) অনুসরণ করিয়া করিয়া চলে যাহা গায়সীয় অভিলম্ব বিস্তারণ সংস্থান বিধি (Law of normal distribution of errors) রূপে বর্ণিত হইয়াছে। এইরূপে এমনকি আপাতিক প্রমাদকেও আকস্মিক বলা শক্ত কেননা গায়সীয় বিধানতত্ত্ব অনুযায়ী এই ধরণের আকস্মিকতার সংঘটনের পৌনঃপুনিকতা, আংশিকভাবে হিসাব নিকাশ করিয়া বলিয়া দেওয়া যায়। যত বেশী সংখ্যক ঘটনার উপর পরীক্ষাকার্য চালান যাইবে, প্রমাদগুলির সংঘটনও ঠিক সেই পরিমাণে নিশ্চিতরূপে বলা যাইতে পারে।

অসংখ্য বৈজ্ঞানিক তথ্যাবলী এবং উপাত্তের অংশ হইতে সত্যিকার তত্ত্বটিকে নির্ণয় করিতে হইলে অভিলম্ব বিস্তারণ সংস্থানে (Normal distribution) গায়সীয় বিধানতত্ত্ব একান্তভাবে

প্রয়োজনীয় হইবে। কিন্তু উক্ত বিধানতত্ত্বের উপযোজন সেইখানেই শেষ নহে। শীঘ্রই অঙ্কশাস্ত্রকারেরা উপলব্ধি করিলেন যে কেবলমাত্র প্রমাদই নহে অন্যান্য যে কোন ঘটনা বা প্রপঞ্চই উক্ত বিধানতত্ত্বের অধীন। ঘণ্টাকৃতি ঐ একই চিত্রলেখ হইতে মনুষ্যজাতির উচ্চতা, বুদ্ধিবৃত্তি এবং অন্যান্য



গুণাবলী সম্বন্ধে জানা যাইতে পারে। এমন কি নির্বোধ কিম্বা প্রতিভাসম্পন্ন, দৈত্যাকৃতি মানুষের সংখ্যা, নভমণ্ডলে সূর্যের গতিবিধির ন্যায়, নিশ্চিত ও স্পষ্টরূপেই বলা যাইতে পারে।

পৃথিবী পৃষ্ঠের মাপজোক এবং নির্বোধদের সংখ্যা নিরীক্ষা করিবার মধ্যে যে যোগাযোগ অর্থাৎ তথ্যমূলকভাবে উহাদের মধ্যে সম্পর্কের বিদ্যমানতা, যাহা ব্যবহারিক অঙ্কের প্রকৃত উন্নতির প্রমাণ স্বরূপ। জিওড্যাসীয় পরিকল্পনা সমাপ্ত করিয়া গায়স দেশে প্রত্যাবর্তন করিলেন। ১৮৩১ খৃষ্টাব্দের ১২ই সেপ্টেম্বর স্ত্রী মিনার মৃত্যু হইল। গায়স তাঁহার পূর্বসূরী আর্কিমিডিস ও নিউটনের মত অঙ্কশাস্ত্রে সম্পূর্ণভাবে আবিষ্ট ও আচ্ছন্ন ছিলেন। তিনি যেন অঙ্কের মধ্যেই বসবাস করিতেন—অন্য দিকে মন দিবার মত সময় তাঁহার ছিল না। সাধারণ লোকের কাছে অঙ্কশাস্ত্রে তাঁহার এই আত্মসমাহিত ভাব বাতুলতা বলিয়া প্রতীয়মান হইত। অঙ্কশাস্ত্রই একমাত্র তাঁহার ধ্যানজ্ঞান ছিল। অন্যান্য সমস্ত কিছুকে বর্জন করিয়া, অবিচল ও একাগ্র নিষ্ঠা সহকারে তিনি অঙ্ক চর্চা করিতেন। অঙ্ক বিষয়ক এত বেশী ভাবনা চিন্তা ও ধ্যান ধারণা তাঁহার মনে ভীড় করিত যে কোনটিতে কবে পর্যন্ত হস্তক্ষেপ করিতে পারিবেন তাহা তিনি নিজেই জানিতেন না। প্রতিটি সাধারণ জিনিসই তাঁহার গাণিতিক জিজ্ঞাসার লক্ষ্যবস্তু ছিল। যেমন ঘর হইতে লাইব্রেরী ও মানমন্দিরে যাইতে পদক্ষেপের সংখ্যা, বন্ধুবান্ধব এবং খ্যাতনামা ব্যক্তিরা কতদিন বাঁচিয়াছিলেন, ছেলেমেয়েরা কোন বয়সে প্রথম হাঁটিতে শিখিল, কবে দাঁত উঠিয়াছে, কবে টীকা লইয়াছে ইত্যাকার বাহ্যতঃ নিতান্ত অকিঞ্চিৎকর গাণিতিক তথ্য সমূহ তিনি অত্যন্ত যত্নসহকারে নোটবুকে লিপিবদ্ধ করিয়া রাখিতেন ভবিষ্যতে কোন সময়ে কাজে লাগাইবেন এই মানসে। পরে পদক্ষেপের এই তালিকা

টোপোলজি Topology * পাঠে সহায়ক হইয়াছিল। লোকজনের বয়সের বিবরণ অবসর গ্রহণের সঙ্গে সম্পর্কিত বীমা সংক্রান্ত হিসাব নিকাশ পর্যবেক্ষণের ভিত্তিভূমি প্রস্তুত করিয়াছিল। কোন প্রকার চেষ্টা ব্যতিরেকেই তিনি সংবর্গমান বা লগারিদ্‌ম শিখিয়াছিলেন। সংখ্যা মনে রাখিবার অত্যাশ্চর্য স্মৃতির সহায়তায় তিনি মনে মনে বৃহৎ সংখ্যা বা রাশিদ্বারা হিসাবনিকাশ করিতে পারিতেন। একবার যে অঙ্ক তিনি করিতেন তাহা তিনি মোটেই ভুলিতেন না। অঙ্ক শাস্ত্রকে তিনি কাব্যের সঙ্গে তুলনা করিয়া বলিয়াছিলেন সংবর্গমান বা লগারিদ্‌মের তথ্য ও ছকের হিসাবের মধ্যে কাব্যরস প্রচুর পরিমাণে বিদ্যমান রহিয়াছে। স্বীয় ক্ষেত্রে তিনি যেন নিখুঁত নৈপুণ্য সাধনের ব্রত নিয়া পদার্পণ করিয়াছিলেন। তিনি অঙ্কশাস্ত্রকে সকল শিল্পের শ্রেষ্ঠ বলিয়া মনে করিতেন।

Mysticism & Logic গ্রন্থে এই প্রসঙ্গে বার্টরাণ্ড রাসেল বলিয়াছেন "অঙ্কশাস্ত্র কেবলমাত্র সত্যকেই নহে চরম সৌন্দর্যকেও আমাদের জ্ঞাত করে। যে সৌন্দর্য শীতল ও নিরঞ্জন, রুক্ষ ও অনাড়ম্বর ভাস্কর্যের মত। আমাদের কোমল হৃদয়বৃত্তিকে স্পর্শ না করিয়াও সঙ্গীত কিম্বা চিত্রকলার জাকজমকপূর্ণ কারুকার্য ছাড়াও যাহা কেবলমাত্র মহৎ শিল্পে প্রতিভাত হইতে পারে তদ্রূপ বিশুদ্ধতার উৎকৃষ্ট নিদর্শনস্বরূপ, উৎকর্ষতার প্রতীকস্বরূপ।" অঙ্কশাস্ত্রে আরও বেশী দৃঢ়তার প্রয়োজন রহিয়াছে, গ্যয়সের এই আবেদন সামগ্রিকভাবে আধুনিক অঙ্কশাস্ত্রের দিক্ নির্ণয় করিয়াছে। গ্রীসিয়দের সময় হইতেই যে সকল পুরাতন সমস্যা লইয়া অঙ্কশাস্ত্রকাররা ভাবিত ছিলেন তাহার মধ্যে অমূলদ সংখ্যা, অসীম ও পরিমেয় ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র অনুকলন প্রভৃতিকে পুনরুজ্জীবিত করিয়া সমাধানের নতুনতর প্রচেষ্টা শুরু হইয়াছিল এই সময়। ক্যানটর, ক্যয়চি, ওয়েয়াস ট্রাস ও ডেডিকিণ্ড প্রমুখ গ্যয়সের গাণিতিক উত্তরাধিকারীগণ, উপরোল্লিখিত অবহেলিত ক্ষেত্রগুলিতে পুঙ্খানুপুঙ্খরূপে পরীক্ষা নিরীক্ষা করিয়া সংখ্যা, অসীম, তিলতমানু অনুকলন ও কাষ্ঠা প্রভৃতি বিষয়ে এতাবৎকাল গৃহীত মূল ধারণার উপর নতুন আলোকপাত করিয়াছিলেন। উৎকর্ষতার প্রতি গ্যয়সের আসক্তি, তাঁহার আলোচ্য বিষয়বস্তু এবং কার্যপ্রণালীর উপরও প্রভাব বিস্তার করিয়াছিল। তাঁহার রচনাকে উৎকর্ষতার আদর্শরূপে পরিগণিত করা হয়। এতদ্‌সত্ত্বেও, তাঁহার গ্রন্থসমূহকে অত্যন্ত জটিল বলিয়া উল্লেখ করা হইয়াছে। পক্ষান্তরে য়্যুলারের শিথিল কল্পনাপ্রধান ও সরল রচনাশৈলীকে প্রাঞ্জলতার নিদর্শন বলিয়া গণ্য করা হয়। এই আপাতবিরোধী দৃষ্টান্ত যেরূপ অদ্ভুত ঠেকিতেছে আসলে ঠিক তাহা নহে। মানুষের মন—এমন কি গণিতজ্ঞদের মনও ধারাবাহিক ভাবে ধাপে ধাপে কাজ করিতে সক্ষম হয় না। হয়ত কিয়দ্দুর অগ্রসর হইয়া বর্তমানকে অতিক্রম করিয়া গেল, কখনো পশ্চাৎমুখী

* টোপোলজি (Topology) বীজগণিত, জ্যামিতি ও পাটীগণিতের মত গাণিতিক বিষয়ের একটি শাখা। নামের আক্ষরিক অর্থ বিষয়ক নির্দেশ হইল, বিন্দুর বা বস্তুর অবস্থান সংক্রান্ত আলোচনা। আদিপর্বে জ্যামিতিক ধাঁধা এবং দড়ি সংক্রান্ত খেলার উপর নির্ভর করিয়া টোপোলজি গড়িয়া উঠিয়াছে।—অনুবাদক

ধাবিত হইল কখনোবা সম্মুখের দিকে অগ্রসর হইতে থাকিল। যখন কঠিন ন্যায়ের কৃত্রিম মানসিক প্রতিক্রিয়া সমূহ সম্মুখীন হয় তখন মনে হয় যে এইগুলি অবশ্যই যুক্তির শৃঙ্খলে জড়িত হইবে।

যতক্ষণ না কোন বিষয় সমাপ্ত করিতে পারিতেন ততক্ষণ গ্যয়স ঐ বিষয়ে কিছু প্রকাশ করিতে চাহিতেন না। গ্যয়স বলিতেন "অসমাপ্ত কাজে আমি কোন তৃপ্তিলাভ করি না এবং যে কাজে আমার কোন আনন্দ উৎপন্ন হয় না তাহা আমার কাছে নির্যাতন স্বরূপ"। সকল কাজই তিনি যথাসম্ভব নিখুঁতভাবে করিবার চেষ্টা করিতেন। তিনি একটি শীলমোহর প্রস্তুত করিয়াছিলেন, যাহার মধ্যে একটি গাছ কয়েকটি বড় আপেল এবং Pauca sed matura এই বাক্যটি খোদিত ছিল। নিউটন যেমন, তাঁহার জীবনের চূড়ান্ত পর্যায়ে উত্তরকালে অন্যান্যরা যাহাতে আরও কাজ করিতে পারেন এই দৃঢ় বিশ্বাসে অনির্ণেয় সমস্যা সমূহ এবং অনুন্নত ধারণা সকল স্বীয় গ্রন্থে সংযুক্ত করিতেন, গ্যয়স ঠিক তাহার বিপরীত ছিলেন। অনেক গণিতজ্ঞই গ্যয়সের এই স্বার্থপর মানসিকতার নিন্দা করিয়াছেন।

গ্যয়স তাঁহার জীবৎকালে ব্যবহারিক ও তত্ত্বীয় গণিতের ক্ষেত্রে প্রচুর কাজ এবং ফলাফল প্রকাশ করিয়াছিলেন। বীজগণিত, জ্যামিতি, বিশ্লেষণ প্রণালী, পাটীগণিত, সংখ্যাতত্ত্ব অঙ্কশাস্ত্রের প্রত্যেকটি শাখারই তিনি প্রভূত উন্নতি বিধান করিয়াছিলেন। তিনি প্রায় বলিতেন অঙ্কশাস্ত্র হইল বিজ্ঞানের রাণী আর অঙ্কশাস্ত্রের রাণী হইল পাটীগণিত। এই রাজকীয় চক্রে গ্যয়স নিজে ছিলেন অঙ্কশাস্ত্রের রাজপুত্র। তিনি শুধুমাত্র আংশিকভাবেই নহে সমগ্র ভাবে অপরিমেয় অঙ্কশাস্ত্রের বিশাল ক্ষেত্রকে উপলব্ধি করিয়াছিলেন। যাহা কিছুই তিনি পর্যবেক্ষণ করিয়াছিলেন তাহাতেই তিনি অপ্রতিদ্বন্দ্বী দক্ষতা অর্জন করিয়াছিলেন। গ্যয়সকে পৃথিবীর সর্বশ্রেষ্ঠ গণিতজ্ঞ বলিয়া অভিহিত করিয়াছিলেন ফরাসী গণিতজ্ঞ লা প্লাঁশ।

তত্ত্বীয় কার্য ব্যতিরেকে গ্যয়স বহু বৎসর ব্যবহারিক গণিতেও নিয়োজিত ছিলেন। জ্যোতির্বিজ্ঞান, চুম্বকত্ব, ভূসংস্থানিক, কেলাসিত, দৃগ্‌বিজ্ঞান এবং বিদ্যুৎ তিনি এইসকল বিষয়েও প্রচুর কাজ করিয়াছিলেন। স্যামুয়েল মর্সের অন্ততঃ তিন বৎসর পূর্বে ১৮৩৩ খৃষ্টাব্দে তিনি ব্যবহারিক ভাবে সঙ্কেতের মাধ্যমে তারবার্তা প্রেরণের সম্ভাব্যতা অনুমান করিয়াছিলেন।

অঙ্কশাস্ত্র গ্যয়সকে খ্যাতি, প্রতিষ্ঠা, শ্রদ্ধা, সফলতার সকল পুরস্কারই দিয়াছিল। একবার তিনি বলিয়াছিলেন "এক এক সময় সমগ্র ভাবনা চিন্তা বিচার বিবেচনা, পর্যবেক্ষণ সকলই ব্যর্থ হইত। রাগে দুঃখে হাতের কলম ছুঁড়িয়া ফেলিয়া দিতাম। শেষ পর্যন্ত কিছুদিন পর আশ্চর্যজনক উপায়ে কৃতকার্য হইতাম। মনে হইত ইহা যেন ঈশ্বরের অসীম অনুগ্রহেই সম্ভব হইল। সমস্যাটি বিদ্যুৎচমকের মত ক্ষণিকের মধ্যেই সমাধা হইয়া গেল, এমন কি আমি নিজে পর্যন্ত চিন্তাভাবনার খেই অনুসরণ করিতে পারি নাই। তখন মনে হইত সমস্যাটি অতীব সহজ এবং সরল ছিল এবং এক অনির্বচনীয় আনন্দে সমগ্র মন ভরিয়া উঠিত।" এই ধরণের আকস্মিক অন্তর্দৃষ্টি প্রায় সকল মহৎ

গণিতজ্ঞের মধ্যেই বর্তমান ছিল। আর্কিমিডিস, নিউটন, দেকার্তে, প্যাসকাল এবং আরও অনেকেই এই গুণের অধিকারী ছিলেন। প্রায়শঃই, দীর্ঘদিনের তীব্র অথচ অর্থহীন ও নিষ্ফল চিন্তা-ভাবনা হইতেই আকস্মিকভাবে অনুপ্রেরণার বিদ্যুৎচমকে সফলতা লাভ করিয়াছে। উদাহরণ স্বরূপ, উল্লেখ করা যাইতে পারে, গ্যয়স নিজে একটি নিয়মিত সতেরো দিক বিশিষ্ট বহুভুজের বৃত্তে অন্তর্লেখনে দীর্ঘকাল যাবৎ প্রয়াস পাইতেছিলেন একদিন সকালে আকস্মিকভাবে কিছুক্ষণের মধ্যেই তিনি উহার সমাধান নির্ণয় করিয়াছিলেন।

প্রকৃতপ্রস্তাবে অঙ্কের প্রতি গ্যয়সের অনুরাগ দুইটি চরম অবস্থার সৃষ্টি করিয়াছিল ; একটি হইল পেশাগত সাফল্য অপরটি হইল ব্যক্তিগত দুঃখ, অশান্তি ও হতাশা। তিনি নীরবে অঙ্ক চিন্তায় গভীর ভাবে নিমগ্ন থাকিয়া অপ্রীতিকর বস্তুজগৎকে ভুলিয়া থাকিবার চেষ্টা করিতেন। তাঁহার পত্নীদ্বয়ের অকাল মৃত্যু ছাড়াও প্রিয় ছাত্র আইজেনস্টাইনের মৃত্যুতে তিনি দুঃখ পাইয়াছিলেন। আইজেনস্টাইনকে তিনি সর্বকালের মহৎ প্রতিভাদের অন্যতম একজন বলিয়া বিবেচনা করিতেন এবং তাঁহার দৃঢ় বিশ্বাস ছিল আইজেনস্টাইন অকালে মৃত্যুমুখে পতিত না হইলে আর্কিমিডিস, নিউটনের সারিতে নিজের স্থান করিয়া লইতেন। মৃত্যুভয় তাঁহাকে বিকারগ্রস্ত স্নায়বিক রোগীতে পরিণত করিয়া তুলিয়াছিল। বিষণ্নতার শিকার হইয়া তিনি সমগ্র বিশ্বাস হারাইয়া ফেলিয়াছিলেন। কেবল মাত্র কাজের মধ্যে আত্মমগ্ন থাকিয়াই কিছুটা স্বস্তি পাইতেন। কারো প্রতি কোন অনুরাগ পর্যন্ত ছিল না। বন্ধুবান্ধব এবং পরিচিতদের তিনি মূর্খ ও বাচাল বলিতেন। তাঁহার ধারণা ছিল পৃথিবী নির্বোধ এবং অসৎ লোকে পূর্ণ। নিজের ছেলে মেয়েরাও এই সকল কারণে বাড়ী ছাড়িয়া চলিয়া গিয়াছিল।

ব্যক্তিগত ভাবে গ্যয়স মিতব্যয়ী ছিলেন, বিলাসিতাকে ঘৃণা করিতেন। তাঁহার পড়ার ঘরে একটি ছোট টেবিল, একটি দাঁড়াইয়া লিখিবার ডেস্ক ও একটি চেয়ার মোট এই তিনটি আসবাবপত্র ছিল। শয়ন কক্ষে কোন চুল্লী পর্যন্ত ছিল না। যথাসাধ্য সাধারণ খাওয়া দাওয়া করিতেন।

বাষট্টি বৎসর বয়সে তিনি যেন মানসিক শান্তি লাভের সঞ্জীবনী হিসাবে নবোদ্যমে রুশ ভাষা শিখিতে আরম্ভ করিলেন এবং দুই বৎসরের মধ্যেই অনর্গল বলিতে ও লিখিতে শিখিলেন। তিনি ফরাসী, গ্রীক, লাতিন, ইংরেজি, ড্যানিস, কিছু কিছু সুইডিস, ইতালিয়ান ও স্প্যানিশ প্রভৃতি বহুবিধ ভাষা জানিতেন। ভাষা ছাড়া বুককিপিং ও শর্টহ্যাণ্ডও শিখিয়াছিলেন।

বয়স বাড়িবার সঙ্গে সঙ্গে দর্শন এবং ধর্মতত্ত্বে তাঁহার উৎসাহ বৃদ্ধি পাইয়াছিল। অবধারিত মৃত্যু এবং মৃত্যুর পরে সম্ভাব্য কি ঘটিতে পারে এই ভাবনা চিন্তা প্রসঙ্গে একবার বলিয়াছিলেন অমরতা ব্যতিরেকে, নিখিল বিশ্ব অর্থহীন ও অযৌক্তিকতায় পর্যবসিত হইত। তথাপি আমাদের সামনে অর্থহীনতা ও অযৌক্তিকতা বর্তমান রহিয়াছে, এইগুলিকে একমাত্র বিশ্বাস দ্বারাই অতিক্রম করা যাইতে পারে। বিশ্বাস করা না করা, কেবল সাধারণ ভাবে ইচ্ছারই অধীন নহে। যে ব্যক্তির মন বৈজ্ঞানিক তথ্যে সমৃদ্ধ, বিশ্বাস অবশ্যই তাহার মিত্র স্বরূপ। গ্যয়সকে এইখানে

অজ্ঞাবাদী মনে হইতে পারে, কিন্তু তিনি আন্তরিক নিষ্ঠার সঙ্গেই বিশ্বাসী হইবার চেষ্টা করিয়াছিলেন।

এই সময় তিনি অনিদ্রা, বদহজম ও হৃদরোগ প্রভৃতি নানাবিধ রোগে ভুগিয়া ভগ্নস্বাস্থ্য হইয়া পড়িলেন। ১৮৫৫ খৃষ্টাব্দের ২৩শে ফেব্রুয়ারী হৃদরোগে আক্রান্ত হইয়া নিষ্ঠুর অমোঘ নিয়তিস্বরূপ মৃত্যুর সঙ্গে সংগ্রাম করিতে করিতে নশ্বরদেহ ত্যাগ করিয়া অমা রজনীর ঘন অন্ধকারে বিলীন হইয়া গেলেন। গোটিঙগেনে সেণ্ট এ্যালবানস সিমেট্রিতে মায়ের অচিহ্নিত সমাধির পার্শ্বে তাঁহাকে সমাধিস্থ করা হইয়াছিল। নিউটনের মত গ্যয়স বিত্তশালী ও ধনবান হইয়াছিলেন। মৃত্যুর পর তাঁহার ব্যক্তিগত সঞ্চয়ে প্রচুর অর্থের সন্ধান পাওয়া গিয়াছিল কিন্তু তাঁহার আসল ঐশ্বর্য "গণিতশাস্ত্রের" কাছে সকল কিছুই ম্লান ছিল।

—*Of Men & Numbers* by Jane Muir হইতে

শ্রীবেলাল চৌধুরী অনূদিত॥

axiom কে বাংলায় স্বতঃসিদ্ধ বলিয়াছি কিন্তু এই পরিভাষা সঠিক নহে এইরূপ মনে হইতে পারে কেননা self evident ই যথার্থ স্বতঃসিদ্ধ হইবে। axiom সহজ সত্য হিসাবে থাকিলে উহাকে স্বতঃসিদ্ধ বলা যাইতেঁ পারে কিন্তু যখন অঙ্কশাস্ত্র বাস্তবের বাহিরে যাইবে তখন axiom কে আর স্বতঃসিদ্ধ বলা যায় না।—অনুবাদক

সংখ্যাতত্ত্বের সূচনা

পূর্ব সংখ্যায় যোগ ও গুণের মধ্যে যোগসূত্র স্থাপক নিয়মের সূচনা করা হইয়াছিল। সেখানে আমাদের ৪(২×৩)=৪×২+৪×৩ প্রভৃতি লিখিবার অভ্যাসের কথা আছে। সাধারণভাবে ইহাকেই গুণের বিতরণ নিয়ম বলা হয়।

গুণের বিতরণ (Distributive) নিয়ম

$$a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c)$$

এই নিয়ম আমাদের পরিচিত বহু গুণ-প্রক্রিয়ার ভিত্তি। উদাহরণ হিসাবে ১৫×২৩ এর গুণপ্রক্রিয়া দেখা যাক।

```
 ১৫
 ২৩
----
 ৪৫
৩০
----
৩৪৫
```

ইহা প্রকৃতপক্ষে নিম্নলিখিত রীতিরই রূপান্তর:

১৫×২৩=১৫×(২০+৩)
=(১৫×২০)+(১৫×৩)
=৩০০+৪৫
=৩৪৫

অথবা, পরবর্তী জটিলতর উদাহরণটি: $(a+b)(c+d)=ac+bc+ad+bd$

$(a+b)(c+d)=(a+b)c+(a+b)d$	[বিতরণ নিয়ম]
$=c(a+b)+d(a+b)$	[বিনিময় নিয়ম]
$=(ca+cb)+(da+db)$	[বিতরণ নিয়ম]
$=ca+cb+da+db$	[যোগের ধর্ম]
$=ac+bc+ad+bd$	[বিনিময় নিয়ম]

সমস্যা

১। $a\times b\times c$ এর সংজ্ঞা নিরূপণ কর।

২। উপরিউক্ত সংজ্ঞার সহায়তায় দেখাও: $a\times b\times c=b\times a\times c$।

৩। দেখাও যে ৩×৫×৭=৭×৫×৩।

৪। নিম্নলিখিত সংখ্যাগুলির গুণ প্রক্রিয়া সম্ভব বিপরীত (Multiplicative Inverse) লেখ:

$$২,\quad \frac{১}{৩},\quad -\frac{১}{\pi},\quad ১,\quad -৩,\quad \frac{১}{২}\sqrt{২},\quad ০,$$

৫। দেখাও যে $(a+b)\times c=a\times c+b\times c$

৬। বাস্তব সংখ্যা কি ভাগ প্রক্রিয়ার জন্য ক্লোজার নিয়ম অনুসরণ করে?

৭। বাস্তব সংখ্যার ভাগ প্রক্রিয়ায় বিনিময় নিয়ম প্রযোজ্য কি?

৮। বাস্তব সংখ্যার ভাগ প্রক্রিয়ায় সংযোগ নিয়ম প্রযোজ্য কি?

৯। সত্য অথবা মিথ্যা প্রমাণ কর:

$$a+(b\times c)=(a+b)\times(a+c)$$

১০। উক্তিটির অসারতা দেখাও:

$$a\div(b+c)=(a\div b)+(a\div c)$$

১১। সবিস্তারে প্রমাণ কর:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$ [$a\times a$ বুঝাইতে a^2 লেখা হয়]।

বাস্তব সংখ্যার ধর্মাবলী

শুরু হইতে যাহা বলা হইল তাহার সারার্থ হিসাবে আমরা এখানে গণিতে বাস্তব সংখ্যার ধর্মগুলি একত্রিত করিতেছি। a, b, c, প্রভৃতি অক্ষরসমূহ যে কোন বাস্তব সংখ্যা বুঝাইতেছে।

ধর্ম ১।	$a+b$ একটি নির্দিষ্ট বাস্তব সংখ্যা	[যোগের ক্লোজার নিয়ম]
ধর্ম ২।	$(a+b)+c=a+(b+c)$	[যোগের সংযোগ নিয়ম]
ধর্ম ৩।	$a+0=0+a=a$	[যোগের অভেদসূচক নিয়ম]
ধর্ম ৪।	$a+(-a)=(-a)+a=0$	[যোগের বিপরীত নিয়ম]
ধর্ম ৫।	$a+b=b+a$	[যোগের বিনিময় নিয়ম]
ধর্ম ৬।	$a\times b$ একটি নির্দিষ্ট বাস্তব সংখ্যা	[গুণের ক্লোজার নিয়ম]
ধর্ম ৭।	$(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$	[গুণের সংযোগ নিয়ম]
ধর্ম ৮।	$a\times 1=1\times a=a$	[গুণের অভেদসূচক নিয়ম]
ধর্ম ৯।	$a\times\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\times a=1,\ a\neq 0$	[গুণের বিপরীত নিয়ম]
ধর্ম ১০।	$a\times b=b\times a$	[গুণের বিনিময় নিয়ম]
ধর্ম ১১।	$a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c)$	[গুণের বিতরণ নিয়ম]

এই এগারোটি ধর্মই সমস্ত গণিত শাস্ত্রের ভিত্তিপ্রস্তর।

সমস্যা

১। উপরিউক্ত ধর্মগুলির যথার্থতা পরীক্ষা কর, যখন :

(ক) $a=\frac{১}{২}, b=২, c=\pi$ (খ) $a=১৩, b=0, c=\frac{১}{৩}$

২। $a+b+c$ এর সংজ্ঞা এবং উপরের এগারটি ধর্মের সহায়তায় প্রমাণ কর—

$$a\times(b+c+d)=(a\times b)+(a\times c)+(a\times d)$$

৩। সংজ্ঞা অনুসারে $a-b=a+(-b)$ ধর্ম ১ হইতে ধর্ম ১১ এর সহায়তায় দেখাও :

$$(a-b)+b=a$$

৪। উপরিউক্ত ১১টি ধর্মের সহায়তায় প্রতি ধাপে যুক্তি সহকারে দেখাও :

(ক) $(x+2y)(2x+y)=2x^2+5xy+2y^2$ (খ) $(2+3x)(1+x)=2+5x+3x^2$.

৫। (ক) দেখাও যে $x=\frac{a}{b}$ ইহা $bx=a$ এই সমীকরণকে সিদ্ধ করে, যখন $b\neq 0$

[অর্থাৎ যখন b এর মান শূণ্য নয়]।

(খ) "যদি a ও b দুইটি বাস্তব সংখ্যা হয় এবং b এর মান শূণ্য না হয় তাহা হইলে এমন একটী তৃতীয় বাস্তব সংখ্যা x পাওয়া যাইবে যাহাতে $bx=a$ হয়"—উক্তির যথার্থতা প্রমাণ কর।

৬) সত্য অথবা মিথ্যা দেখাও : " a যে কোন একটি বাস্তব সংখ্যা হইলে অপর এমন একটী বাস্তব সংখ্যা x পাওয়া যাইবে যাহাতে $ox=a$ হয়।"

শূণ্যের বিশেষ ধর্মাবলী

বাস্তব সংখ্যার পরীক্ষা নিরীক্ষায় শূণ্যের আচরণ বিধিই সর্ব্বাপেক্ষা অসুবিধাজনক অংশ। ভগ্নাংশের লব ও হর হিসাবে তিনটি বিভিন্ন স্থানে শূণ্যের অবস্থিতি দেখা যায় :

$$\frac{o}{b},\ \frac{a}{o},\ \frac{o}{o},\ [b\neq o,\ a\neq o]$$

প্রথমতঃ দেখা যাক $\frac{a}{b}=c, [b\neq o]$ এই সমীকরণটিকে অন্যরূপে লিখিলে দাঁড়ায় $a=b\times c$, এইরূপ ভাবে $\frac{o}{b}=c$ এই সমীকরণকে রূপান্তরিত করিয়া লিখিলে $o=b\times c$; কিন্তু যেহেতু b এর মান শূণ্য নয় ইহা পূর্ব্বাহ্নেই ধরিয়া লওয়া হইয়াছে, অতএব $c=o$। সুতরাং $\frac{o}{b}=o$।

$\frac{a}{o}, [a\neq o]$ কিন্তু সম্পূর্ণ ভিন্ন জাতের প্রতীক।

$\frac{a}{o}=c$ এই সমীকরণ হইতে পাই $a=c\times o$; কিন্তু c এর সমস্ত মানের জন্যই $c\times o=o$, এবং সুতরাং $c\times o$ কখনই a এর সমান হইতে পারে না, যেহেতু $a\neq o$ (প্রকল্প অনুসারে)। অতএব $\frac{a}{o}$ ইহা অর্থহীন।

শেষতঃ আমরা $\frac{o}{o}$ ইহার আলোচনা করিব। $\frac{o}{o}=c$ এই সমীকরণ হইতে পাই $o=o\times c$, যাহা c এর যে কোন বাস্তব মানের জন্য সত্য। এই কারণে $\frac{o}{o}$ কে অনির্ধারিত বলা হয়।

ইহা হইতে $\frac{a}{a}$, $[\,a\neq o\,]$ সম্বন্ধে যেন কোন বিভ্রান্তির সৃষ্টি না হয় ; $\frac{a}{a}=1$.

সংক্ষেপে দেখা গেল, ভগ্নাংশের হর হিসাবে শূণ্যের উপস্থিতি অবাঞ্ছনীয়। কিন্তু $\frac{o}{a}$ $[\,a\neq o\,]$ শূণ্যের সমান।

সমস্যা

১। নিম্নলিখিত ভগ্নাংশগুলির অর্থ নিরূপণ কর :

$$\frac{২}{০},\ \frac{০}{২},\ \frac{২}{২},\ \frac{০}{০},\ \frac{০}{\frac{১}{২}},\ \frac{\pi}{\pi},\ \frac{\pi}{০}$$

২। x এর কোন মানের জন্য নিম্নলিখিত ভগ্নাংশগুলি অর্থহীন ?

$$\frac{x+1}{x-1},\ \frac{2}{x},\ \frac{3x+2}{x^2+2},\ \frac{x-1}{x-1},\ \frac{o}{4+x^2}$$

৩। x এর কোন বাস্তব মানের জন্য নিম্নলিখিত ভগ্নাংশগুলি অনির্ধারিত ?

$$\frac{x^2}{2x},\ \frac{x+2}{2x+4},\ \frac{o}{x^2},\ \frac{1+x^2}{2+x^2},\ \frac{2x-1}{4x^2-2x}$$

Principles of Mathematics by Allendoerfer & Oakley
হইতে সুযশ সরকার অনূদিত।

অনইউক্লিডীয় জ্যামিতি

ঐতিহাসিক বৈশিষ্ট্য

অনইউক্লিডীয় জ্যামিতি বর্তমানে অঙ্কশাস্ত্রের একটি গুরুত্বপুর্ণ শাখা হিসাবে স্বীকৃতি লাভ করিয়াছে এবং এই অনইউক্লিডীয় জ্যামিতির ইতিহাস এতই সুবিদিত ও এতবার লেখা হইয়াছে যে আমরা এখানে উহার, শুধুমাত্র একটি মোটামুটি সংক্ষিপ্ত বিবরণীই লিপিবদ্ধ করিব।

ইউক্লিডের একটি স্বতঃপ্রতীয়মানতা (axiom)ই উহার প্রকাশে কিছুটা জটিল চরিত্রের যাহাকে অবশিষ্টগুলির মত সরল প্রাথমিক তথ্য নির্ভর বলিয়া মনে হয় না। উহা হইল, [1]

যদি দুইটি রেখা একটি তৃতীয় রেখা দ্বারা খণ্ডিত হয় এবং খণ্ডনকারী রেখার একই পার্শ্বস্থ অন্তস্থ কোণের যোগফল বা সমষ্টি যদি দুই সমকোণের কম হয়, তাহা হইলে রেখাগুলি পর্যাপ্ত পরিমাণে প্রলম্বিত হইলে খণ্ডনকারী রেখার পুর্বোক্ত পার্শ্বে মিলিত হইবে।

এই প্রতিজ্ঞার প্রমাণ নির্ণয় করিবার নিমিত্ত অনেক গণিতজ্ঞই প্রয়াস পাইয়াছিলেন; উহাদের মধ্যে ল্যুজ্যঁদর এর নামই সর্বাপেক্ষা উল্লেখযোগ্য। তিনি দেখাইতে চাহিয়াছিলেন, যে সকল স্বতঃপ্রতীয়মানতার প্রয়োজনীয় অনুক্রমই ইহাকে পুর্ববর্তী মানক্রম করিয়াছে অর্থাৎ প্রতিজ্ঞাটি পুর্ববর্তী সরলতর প্রতিজ্ঞাগুলি হইতেই অবধারিত ভাবে আসিতেছে। ল্যুজ্যঁদর প্রমাণ করিয়াছিলেন যে, একটি ত্রিভুজের কোণের যোগফল বা সমষ্টি কখনই দুইটি সমকোণকে অতিক্রম করিতে পারে না এবং যদি এমন একটি ত্রিভুজ থাকে যাহাতে এই যোগফল দুই সমকোণের সমান তাহা হইলে সকল ত্রিভুজ সম্পর্কেই ইহা অনুরূপ ভাবে সত্য। রেখার দৈর্ঘ্যের কোন সীমা নাই অনুমানের উপরই অবশ্য, এই প্রমাণ নির্ভরশীল ছিল। যাহাই হউক, তিনি এইরূপ কোন ত্রিভুজের অস্তিত্ব প্রমাণ করিতে পারেন নাই যাহার কোণগুলির যোগফল দুইটিই সমকোণ।[2]

অবশেষে কিছু গণিতজ্ঞ বিশ্বাস করিতে শুরু করিলেন যে ঐ তথ্যবিবৃতি প্রমাণের অসাধ্য, যদিও উক্ত তথ্য সর্বদা সত্য নহে ধরিয়াও সমপরিমাণে যুক্তি সিদ্ধ জ্যামিতি গঠন করা সম্ভব। এবং সর্বশেষে ইউক্লিডের সমুদয় স্বীকার্যগুলি কেবল মাত্র অনুমান, যে অনুমানগুলি

১। ইউক্লিডের axiom এর উপর পল ট্যানারি কৃত প্রবন্ধ, Bulletin des sciences Mathématiques, 1884 দ্রষ্টব্য।

২। ল্যুজ্যঁদর কৃত দ্বাদশ সংস্করণের E'léments de Géométrie, Livré I, Proposition XIX, এবং Noté II দ্রষ্টব্য।

Bulletin des sciences Mathématiques এর প্রথম সিরিজের দ্বিতীয় ভল্যুমে অনইউক্লিডীয় জ্যামিতির উপর ক্লেইন রচিত প্রবন্ধটিও দ্রষ্টব্য।

৩। American Mathematical Monthly, July-August 1895 দ্রষ্টব্য।

ব্যবহারিক অভিজ্ঞতা হইতে সত্য বলিয়া মনে হয় বটে কিন্তু ভিন্নতর অনুমান দ্বারাও উহাদের যুক্তি পারম্পর্য অক্ষুণ্ণ রাখা সম্ভব হইতে পারে।

এই তত্ত্বের সূচনাকারী হিসাবে অনেক সময় গ্যয়সের নাম উল্লেখ করা হয়। কিন্তু পরবর্তীকালে জানা গিয়াছে যে ১৭৬৬ খৃষ্টাব্দে ল্যাম্বার্ট [8] লিখিতভাবে একটি প্রবন্ধে সমান্তরাল রেখাবিষয়ক স্বতঃপ্রতীয়মানতা যে প্রমাণ সাপেক্ষ তাহা উল্লেখ করিয়াছিলেন এবং এমন কতকগুলি জ্যামিতির কথা বর্ণনা করিয়াছিলেন যেখানে ঐ স্বতঃপ্রতীয়মানতাকে সত্য বলিয়া মানিয়া লওয়া সম্ভব নহে। এমন কি ১৭৩৩ খৃষ্টাব্দে ইতালিতে সাক্কেরি যে গ্রন্থ রচনা করিয়াছিলেন তাহাতেও তিনি অনউইক্লিডীয় জ্যামিতির পুর্ণ পদ্ধতি নিরূপিত করিয়াছিলেন এবং এই সঙ্গে অন্যান্য প্রকল্পগুলি যে অনৃত—এই প্রমাণ নির্ণয় করিবার প্রচেষ্টা করিয়া আত্মরক্ষা করিয়াছিলেন। এইখানে প্রথম পরিচ্ছেদের ভিত্তিবতত্ত্ব (basis) হিসাবে সাক্কেরির পদ্ধতিই অনুসৃত হইয়াছে।

সমান্তরালসম্পর্কীয় স্বতঃপ্রতীয়মানতাকে প্রমাণ করিবার জন্য গ্যয়স বহুকাল যাবৎ ব্যাপৃত ছিলেন। তিনি `হয়ত যে উপপাদ্যগুলির প্রমাণে সমান্তরাল বিষয়ক স্বীকৃতিগুলি পরিত্যাগ করা আবশ্যক ছিল, সেই স্বতঃপ্রতীয়মানতার অস্বীকার্য অনুক্রমের ফলেই কিছু উপপাদ্য আবিষ্কারে সমর্থ হইয়াছিলেন, কিন্তু তিনি নিজে কখন এই বিষয়ে কিছু প্রকাশ করেন নাই।

হাঙ্গেরীর যোহান বোলিয়্যাই এবং রাশিয়ার লোবাচোেভস্কিই প্রথম দৃঢ় ঘোষণা করিয়াছিলেন যে সমান্তরালের স্বতঃপ্রতীয়মানতা আবশ্যিকভাবে সত্য নহে। তাঁহারা উভয়েই সম্পুর্ণ স্বাধীন ও পৃথকভাবে নিজেদের কাজ করিয়াছিলেন। এই আবিষ্কারের কৃতিত্ব তাঁহাদের উভয়েরই প্রাপ্য। ১৮৩০ খৃষ্টাব্দে এই ফলাফল প্রকাশিত হইয়াছিল।

বহুকাল পরেই এই আবিষ্কার বিশেষভাবে সকলের দৃষ্টি আকর্ষণ করিয়াছিল। ইতিমধ্যে অন্যান্য ক্ষেত্রে এই বিষয়ে ব্যাপক ভাবে অনুসন্ধানের কাজ চলিতেছিল এবং পরবর্তীকালে এই সকল বিষয়ে যথেষ্ট আলোকপাত করা হইয়াছে, বস্তুতপক্ষে, কেবলমাত্র ব্যাখ্যা দ্বারাই নহে, উহাদের সমতুল্যতার দ্বারা যথেষ্ট আলোকপাত করা হইয়াছিল।

এইভাবে এক বৎসর কি দুই বৎসরের মধ্যেই উভয়ের "ক্রেল" নামক একই পত্রিকায় নানাপ্রকার পর্যবেক্ষণের ফলাফল ব্যক্ত করিয়া, প্রথমে লোবাচোেভস্কীর একটি প্রবন্ধ প্রকাশিত হইয়াছিল এবং উরস্থলের উপর—মাইণ্ডিং লিখিত স্মৃতিকথা প্রকাশিত হইয়াছিল যাহাতে তিনি গোলক সংক্রান্ত ত্রিকোণমিতি ফর্মুলা বা সূত্র, যদি আমরা a র বদলে ia ইত্যাদি লিখি তাহাকে প্রতিষ্ঠিত করে, এইরূপ দেখাইয়াছিলেন। এই দুইটি বিষয় প্রকাশিত হইবার ত্রিশ বৎসর পরে ইহাদের সংযোগ সাযুজ্যতা বেল্টরামি কর্তৃক সর্বপ্রথম পরিলক্ষিত হয়।

পুনরায়, ১৮৫৯ খৃষ্টাব্দে Philosophical Transactions গ্রন্থে Quantics এর উপর

৪। The American Mathematical Monthly পত্রিকায় হলস্টেড কৃত The Translation of Saccheri নিবন্ধ দ্রষ্টব্য।

কেয়িলির ষষ্ঠ স্মৃতিকথা প্রকাশিত হইয়াছিল যাহাতে তিনি পরিমাপনের অভিক্ষিপ্ত তত্ত্বকে উন্নীত করিয়াছিলেন এবং দেখাইয়াছেন, যে কোন চিত্রের অসমন্বয় পূর্ণ সম্পর্ককে বিবেচনা করিয়া নিশ্চিত বিশেষ ধরণের কোন চিত্র দ্বারা কিভাবে পরিমাপমূলক গুণকে (metrical properties) অভিক্ষিপ্তরূপে ব্যবহার করা যায়, এবং যাহাকে তিনি ধ্রুব পারম্য বলিয়া আখ্যায়িত করিয়াছিলেন। ১৮৭২ খৃষ্টাব্দে ক্লেইন দেখাইলেন যে এই তত্ত্বই অনইউক্লিডীয় জ্যামিতির যথাযথ প্রতিরূপ।

উপরন্তু ইহাও দেখান হইয়াছিল যে, যদি আমরা পরিমাপনের এমন একটি একক ভাবিতে পারি যে একক যখন তলে কিম্বা শূন্যে চলিতে থাকে তখন কোন নির্দ্দিষ্ট বিধান অনুযায়ী পরিবর্ত্তিত হয়। তাহা হইলেই আমরা অনইউক্লিডীয় জ্যামিতি অনুধাবন করিতে পারি।

এই ক্ষেত্রে পূর্বতন গনিতজ্ঞরা কেবলমাত্র এই জ্যামিতিকেই আবিষ্কার করিয়াছিলেন যাহার মধ্যে সূক্ষ্ম কোণের প্রকল্পকে প্রতীতি ধরিয়া লওয়া হইয়াছিল। একটি রেখা সসীম দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট হইতে পারে এই সম্ভাবনার কথা তাঁহাদের মনে কখন উদয় হয় নাই। পরবর্তী সময়ে, উপবৃত্ত সংক্রান্ত জ্যামিতি আবিষ্কার করিয়াছিলেন র‍্যাইমান। ইতি ১৮৫৪ খৃষ্টাব্দে জ্যামিতির ভিত্তিনীতির উপর সম্পূর্ণ আলাদা দৃষ্টিভঙ্গী হইতে অনুশীলন শুরু করিয়াছিলেন যাহাকে নিরংশ বীজ-গাণিতিক দৃষ্টিভঙ্গী বলা যাইতে পারে। কেবলমাত্র ব্যাখ্যাকারী চিত্র পদ্ধতি ব্যতিরেকে চলের রীতি দ্বারা স্থান কিম্বা জ্যামিতিক চিত্রকে তিনি পুরোপুরি পরিহার করিয়াছিলেন। এই সকল চলের অপেক্ষকের প্রকৃতি কি যাহাদের দৈর্ঘ্য বা দূরত্বের অন্তক বলা যাইতে পারে, এই প্রশ্নেরই তিনি অনুসন্ধান করিতেছিলেন। তিনি দেখিয়াছিলেন সহজতম অবস্থায় ইহা সেই চলেরই অনুকলনের দ্বিঘাত অপেক্ষকের বর্গমূল যে চলগুলির সহগরাজি স্বতঃপ্রবৃত্তভাবেই চলগুলির অপেক্ষক। দ্বিঘাত রাশিমালার বিভিন্ন আকার লইয়া আমরা এই সকল ভিন্ন প্রকারের জ্যামিতির অসীম সংখ্যা পাই। কিন্তু বেশীর ভাগের মধ্যেই আমরা স্বতঃপ্রতীয়মানতাকে হারাই, যে অঙ্ককে উহার আকার কিম্বা আয়তনের পরিবর্তন না করিয়াও স্থানান্তরিত করা যায়।

এই প্রসঙ্গে হেল্মহোলট্জ এবং ক্লিফোর্ডের নাম সবিশেষভাবে উল্লেখযোগ্য। তাঁহারা উভয়েই এই বিষয়কে বিজ্ঞান বিষয়ক জর্নালে প্রবন্ধ লিখিয়া জনপ্রিয় করিয়া তুলিয়াছিলেন। বিশেষ করিয়া ক্লিফোর্ডের নিকট আমরা উপবৃত্তাকার স্থানে সমান্তরাল তত্ত্বের জন্য ঋণী। পরে এই বিষয়ে আমরা বিশদ আলোচনা করিব। তিনি দেখাইয়াছিলেন এই প্রকার জ্যামিতিতে আমরা একটি সসীম তলকে পাইতে পারি যাহার উপর নির্ভর করিয়া ইউক্লিডীয় জ্যামিতি সত্যকে ধারণ করিতেছে।[৫]

৫ অনইউক্লিডীয় জ্যামিতি বিষয়ে অধিকতর আকর্ষনীয় তথ্য উল্লিখিত গ্রন্থসমূহে পাওয়া যাইবে।

অনইউক্লিডীয় জ্যামিতির প্রধান শিক্ষা হইল যে স্বতঃপ্রতীয়মানতা ভৌতবিজ্ঞান তত্ত্বের মত কেবলমাত্র আমাদের অভিজ্ঞতা হইতে অবরোহ অনুমান ভিত্তিক। দার্শনিক ছাড়া গনিতজ্ঞদের কাছে উহারা কেবল প্রকল্প, যাহার সত্যতা কিম্বা অনৃতি তাহার সঙ্গে সংশ্লিষ্ট নহে। গণিতজ্ঞ যিনি, তিনি যেমন ইচ্ছা তেমন যে কোন আকারকেই গ্রহণ করিতে পারেন এবং ঐ আকারের উপর জ্যামিতিকে প্রতিষ্ঠিত করিতে পারেন। অনুরূপভাবে প্রাপ্ত জ্যামিতিকে অঙ্কশাস্ত্রের অন্যান্য শাখায় উপযোজনের প্রাসঙ্গিকতা রহিয়াছে।

এই সকল জ্যামিতিক প্রতিজ্ঞাসমূহে স্বতঃপ্রতীয়মান এই শব্দটিকে প্রয়োগ করা হইয়াছে —স্বতঃসিদ্ধ রূপে কিম্বা অপরিহার্য্য সত্য বলিয়াও নহে। যদি নিশ্চিত কোন বিবৃতি প্রমাণ করা যায় অর্থাৎ ইতিমধ্যেই যদি কোন স্বতঃপ্রতীয়মানতার (axiom) অপরিহার্য অনুক্রম বলিয়া গৃহীত হয়, তথাপি উহাকে স্বতঃপ্রতীয়মানতা বলা উচিৎ নহে। প্রথম সূত্রপাত হইতে গৃহীত হইয়াছে এমন সকল স্বতঃপ্রতীয়মানতাকে লইয়া যখন দুই কিম্বা ততোধিক পারস্পরিক ভাবে পরস্পরবিরোধী বিবৃতকরণ সমান ভাবেই সঙ্গতিপূর্ণ হয়, সেক্ষেত্রে আমাদের ইচ্ছানুযায়ী যে কোন একটিকে মানিয়া লইতে পারি এবং যে বিবৃতিকে আমরা গ্রহণ করিব উহাই আমাদের জ্যামিতির স্বতঃপ্রতীয়মানতা হইবে। আমাদের অলোচ্য জ্যামিতি এই স্বতঃপ্রতীয়মানতার অনুক্রমেরই অনুশীলন।

যে তিন প্রকারের জ্যামিতির বিষয়ে আমরা আলোচনা করিয়াছিলাম তাহা বিভিন্ন তিন প্রকারের অনুমানের উপর প্রতিষ্ঠিত। একটি বিন্দুর মধ্য দিয়া একটি সমান্তরাল যুগল

Encyclopedia Britannica তে স্যার রবার্ট বল কৃত Measurement নিবন্ধ দ্রষ্টব্য; Revue Général des Sciences, 1891 পত্রিকায় প্যাওয়াকারে কৃত "Les Géométries Non-Euclidean" নিবন্ধটি দ্রষ্টব্য। Bulletin of the American Mathematical Society, May & June, 1900, পত্রিকায় ফ্রেডরিক এস. উড রচিত Lobachevsky's Geometry প্রবন্ধটি দ্রষ্টব্য। Mathematische Annelen, Bd. xliv, p. 149, 1897 এবং Bulletin Des Sciences Mathématiques, 1897, গ্রন্থদ্বয় দ্রষ্টব্য। "Letters of Gauss and Bolyai" গ্রন্থে বিশেষ করিয়া কৌতুহলোদ্দীপক একটি চিঠি, যাহাতে গ্যয়স একটি ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল এই প্রকল্পে সর্বদাই অনুরূপ একটি সসীম ক্ষেত্রফল টানিয়া আমরা যে তিনটি পারস্পরিক সমান্তরাল রেখা অঙ্কন করিতে পারি এই সূত্রের উল্লেখ করিয়াছেন এ প্রসঙ্গে তাৎপর্যপূর্ণ ও সবিশেষভাবে দ্রষ্টব্য।

অধ্যাপক এঙ্গেল ও স্ট্যাকেল রচিত শেষোক্ত প্রবন্ধ দুইটি সমান্তরাল তত্ত্বের সামগ্রিক ইতিহাস, লোবাচোস্কি এবং বোলিয়াই-র জীবনী ও রচনাবলী সম্বলিত। অধ্যাপক জর্জ ব্রুস হলস্টেড কৃত লোবাচোস্কি ও বোলিয়াই এর রচনার অনুবাদ এবং অধ্যাপক ভাসিলিয়েভ এর একটি ভাষণও এই প্রসঙ্গে দ্রষ্টব্য।

অথবা দুইটি সমান্তরাল যুগল অঙ্কন করা যাইতে পারে অথবা কোন সমান্তরাল যুগলই অঙ্কন করা যাইতে পারে না; একটি ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ অথবা দুই সমকোণ হইতে কম অথবা দুই সমকোণ অপেক্ষা বেশী; কোন সরল রেখাকে অসীম অবধি বর্দ্ধিত করা সম্ভব নহে অথবা একদিকে অসীম অবধি বর্দ্ধিত করা সম্ভব অথবা দুই দিকেই অসীম অবধি বর্দ্ধিত করা সম্ভব; এক সমতলে সদৃশ আকৃতি অঙ্কন করা সম্ভব অথবা সম্ভব নহে; একটি সরলরেখা সসীম দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট অথবা অসীম দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট—ইত্যাকার বিভিন্ন অনুমান গ্রহনের ফলে বিভিন্ন জ্যামিতির উদ্ভব হয়। এই মূল অনুমানগুলি কোন কোন জ্যামিতির চরিত্র অবধারিত করিয়া থাকে, এবং এই জ্যামিতির অন্যান্য অঙ্গও এই সকল অনুমান দ্বারাই অধিগম্য।

প্রস্তাবনা

পূর্বে জ্যামিতির স্বতঃপ্রতীয়মানতাকে চিন্তাধর্মের বিধানতত্ব বলিয়া বিবেচনা করা হইত কেননা উহাকে মেধাসম্পন্ন মন দ্বারা অস্বীকার করা যাইত না, এমন কি অনুসন্ধান করাও অসম্ভব ছিল। যাহা আমাদের অভিজ্ঞতার সঙ্গে মিলিয়া যাইতে দেখা যাইত; কেবলমাত্র সেই স্বতঃপ্রতিয়মানতা নহে অধিকন্তু ইহা বিশ্বাস করা হইত যে ঐগুলির অর্থাৎ স্বতঃপ্রতীয়মানতাগুলির কোনটাই সত্য নহে, এই অনুমানের ভিত্তিতে আমরা কোন কারণ বা যুক্তি প্রদর্শন করিতে পারি না। যাহাই হউক, ইহা দেখান হইয়াছে যে আংশিক বা পুর্ণভাবেই ইউক্লিডের বিপরীতধর্মী এক গোছ (set) স্বতঃপ্রতীয়মানতাকে লইয়া তাহার জ্যামিতির মতই সঙ্গতিমূলক অন্য আর এক প্রকার জ্যামিতির রূপায়ণ সম্ভবপর।

আমরা, এইখানে দুই প্রকার জ্যামিতির (অবশ্যই অনইউক্লিডীয়) প্রসঙ্গ আলোচনা করিব। কেবলমাত্র যেগুলি সমান্তরাল রেখা সম্পর্কিত, সেগুলি ব্যতিরেকে বর্তমান নিবন্ধে, স্বতঃপ্রতীয়মান এবং সংজ্ঞা সমূহ ইউক্লিডে যে রূপ আছে সেইরূপই লওয়া হইল। সমান্তরাল রেখার উপর নির্ভরশীল স্বতঃপ্রতীয়মানতাগুলিকে বাদ দিলে আমরা তিনটি প্রকল্পে পৌছিতেছি। ইহাদের মধ্যে একটি ইউক্লিডীয় জ্যামিতিকেই প্রতিষ্ঠিত করে এবং অপর দুইটির—প্রত্যেকটিই কৌতুহলোদ্দীপক ও কার্যকর কতকগুলি সারিবদ্ধ প্রতিজ্ঞা আমাদের সামনে উপস্থিত করে। বস্তুতঃপক্ষে, যতক্ষণ পর্যন্ত আমরা সীমিত অংশকেই অনুসন্ধান করিতে পারিতেছি, ততক্ষণ পর্যন্ত ইহা প্রমাণ করা সম্ভব নয় যে, আমরা যে দুইটি অনইউক্লিডীয় জ্যামিতি বর্ণনা করিতে যাইতেছি তাহা অপেক্ষা ইউক্লিডীয় পদ্ধতিই অধিকতর সত্য। আমরা এমন একটি ব্যবস্থা অবলম্বন করিব যাহা আমাদের প্রথমেই প্রমাণ করিতে সমর্থ করিবে যে, প্রতিজ্ঞা সমূহ তিন প্রকার জ্যামিতির কাছেই এজমালি বা একই, দ্বিতীয়তঃ ইউক্লিড হইতে ভিন্নতর অন্য দুই প্রকার জ্যামিতির প্রত্যেকটির জন্য সারিবদ্ধ প্রতিজ্ঞা ও ত্রিকোণমিতি সূত্র প্রকাশ করা এবং পরে বৈশ্লেষিক পদ্ধতি দ্বারা উহাদের বিশেষ আকর্ষণীয় বৈশিষ্ট্য নিরূপিত করা। এই অনুশীলনে আমরা জ্যামিতির ভিত্তিনীতির প্রত্যক্ষ অনুসন্ধানের অভিপ্রায় ব্যক্ত করিতেছি না, এমন কি জ্ঞাত কিম্বা অজ্ঞাতসারে মানিয়া লওয়া সকল বিষয় সমূহকে নির্দেশও

করিতেছি না। এই সকল জ্যামিতিতে এজমালি যাহা রহিয়াছে সেইগুলিকে পরিহার করিয়া আমরা কেবলমাত্র ঐগুলির বৈসাদৃশ্যের প্রতিই আমাদের দৃষ্টি স্থির নিবদ্ধ করিব। নিরাংশ তত্ব ছাড়াও সমবদ্ধ ব্যাখ্যা বিশ্লেষণ দ্বারা জ্যামিতির প্রকৃতি বিষয়ে আরও বিশদভাবে জানা যাইবে। এইরূপে আমরা এখানে আমাদের পাঠ্যে উল্লিখিত সংজ্ঞার পুনরাবৃত্তি না করিয়া অধিকতর জ্যামিতিক পদেরই উল্লেখ করিব এবং ধরিয়া লইব যে এই সকল পদ দ্বারা যে সকল চিত্রের সংজ্ঞা নিরূপণ করা হইয়াছে সেগুলি বিদ্যমানই রহিয়াছে। বিশেষ করিয়া আমরা ধরিয়া লইব যে,

ক: যে কোন দুই বিন্দু দ্বারা সরলরেখার বিদ্যমানতা নির্দ্ধারিত হয় এবং বিন্দুদ্বয়ের মধ্যবর্তী সংক্ষিপ্ত পথ হইল সরলরেখা।

খ: সমতলের বিদ্যমানতা তখনই নির্দ্ধারিত হয় তিনটি বিন্দু দ্বারা গঠিত সরল রেখায় নহে এমন রেখার দ্বারাই এবং একটি সরল রেখা সমতলের যে কোন দুই বিন্দুকে যুক্ত করে যাহা সমগ্রভাবে সমতলের মধ্যেই নিহিত।

গ: জ্যামিতিক চিত্রের আকার বা আয়তনকে কোনরূপ পরিবর্তন না করিয়াও নড়ান যাইতে পারে।

ঘ: রেখার প্রতিটি বিন্দুকেই অতিক্রম করিয়া একটি বিন্দু একটি রেখার সহিত এক অবস্থান হইতে অন্য অবস্থান পর্যন্ত চলে। এবং জ্যামিতিক মানগুণ্য উদাহরণ-স্বরূপ—একটি কোণ কিম্বা একটি অন্যটির মান হইতে ভিন্নতর একটি রেখার আংশিক দৈর্ঘ্য সকল মধ্যবর্তী মানের ভিতর দিয়া অতিক্রম করে।

যেখানে আমাদের সাধারণ পাঠ্য হইতে বিশদ বিবরণ সরবরাহ করা যাইবে সেখানে কিছু প্রতিজ্ঞাতে প্রমাণ বাদ দেওয়া হইবে অথবা কেবলমাত্র প্রমাণ পদ্ধতির ইঙ্গিত দেওয়া হইবে।

প্রথম পরিচ্ছেদ

প্যানজিওমেট্রি (Pangeometry)

১। কেবলমাত্র উপরিপত্তির জন্যত্বের উপর নির্ভরশীল প্রতিজ্ঞাসমূহ

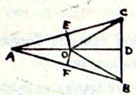
উপপাদ্য ১ঃ যদি একটি সরলরেখা অন্য একটি সরলরেখাতে মিলিত হয়, উদ্ভূত সন্নিহিত কোণদ্বয়ের যোগফল দুই সমকোণের সমান।

উপপাদ্য ২ঃ যদি দুইটি সরলরেখা পরস্পরকে ছেদ করে, তাহা হইলে শিরঃকোণদ্বয় সমান হইবে।

উপপাদ্য ৩ঃ যদি একটি বাহু এবং দুইটি সন্নিহিত কোণ অথবা দুইটি বাহু এবং অন্তর্ভুক্ত কোণ যথাক্রমে অন্যটির অনুরূপ অংশে একটির সমান হয় তাহা হইলে ত্রিভুজ দুইটি সমান হইবে।

উপপাদ্য ৪ঃ একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে সমান বাহুর বিপরীত কোণসমূহ সমান।
শীর্ষকোণকে দ্বিখণ্ডিত করিয়া (৩) ব্যবহার কর।

উপপাদ্য ৫ঃ একটি ত্রিভুজের যে কোন দুইটি বাহুর লম্ব সমদ্বিখণ্ডিত যদি অন্তস্থঃ কোন বিন্দুতে ছেদ করে তাহা হইলে তৃতীয় বাহুর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক এবং ঐ বিন্দুতে মিলিত হইবে। এই বিন্দুটি ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুত্রয়ের মধ্য দিয়া অঙ্কিত বৃত্তের কেন্দ্র হইবে।

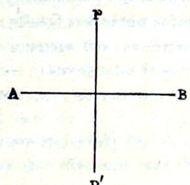


প্রমাণ: মনে কর EO এবং FO রেখা O বিন্দুতে মিলিত হইতেছে। AFO এবং BFO (3) দ্বারা সমান। এইরূপে AEO এবং CEO সমান।
অতএব, CO এবং BO রেখা সমান যেহেতু ইহারা প্রত্যেকটিই AO রেখার সমান। সুতরাং BCO সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ এবং BOC কোণকে যদি OD রেখা ছেদ করিতেছে এইরূপ অঙ্কন করা যায় তাহা হইলে BC রেখার মধ্য বিন্দুতে উহা লম্ব হইবে।

উপপাদ্য ৬ঃ বৃত্তের কেন্দ্রবিন্দুস্থঃ কোণের সমদ্বিখণ্ডক যে জ্যা দ্বারা কোণটি উৎপন্ন হইতেছে সেই জ্যার লম্ব সমদ্বিখণ্ডক হইবে।

উপপাদ্য ৭ঃ একটি বৃত্তের কেন্দ্রে কোণ বিচ্ছিন্নকারী চাপের আনুপাতিক এবং উহাদের দ্বারা পরিমেয় সাধ্য হইতে পারে।

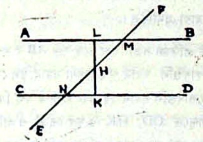
উপপাদ্য ৮ঃ একটি সরলরেখার বহিঃস্থ কোন বিন্দু হইতে ঐ সরলরেখার উপর একটি লম্ব অঙ্কন করা সম্ভব।



প্রমাণ: ধরা যাউক P′ হইল অবস্থান। যদি সমতলকে উহার সমাপতনের ভিতর AB র বিপরীত দিকে আবর্তিত করা হয় তাহা হইলে ঐ অবস্থান P দখল করিবে; অতএব PP′ সরলরেখা AB রেখার লম্ব হইতেছে।

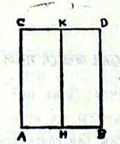
উপপাদ্য ৯ঃ যদি লম্বের একটি বিন্দু হইতে বক্ররেখা অঙ্কন করা যায়, যাহা লম্বের পাদদেশ হইতে সমদূরত্বে একটি রেখাকে ছেদ করিতেছে উহারা রেখা ও লম্বের সমান হইতেছে এবং সমান কোণ সৃষ্টি করিতেছে।

উপপাদ্য ১০ঃ একই কোণে যদি দুইটি রেখা একটি তৃতীয় রেখাকে ছেদ করে যাহার অনুরূপ কোণ সমূহ সমান তাহা হইলে এমন একটি রেখা অঙ্কন করা যাইতে পারে যাহা উভয়েরই লম্ব হইবে।



প্রমাণ: ধরা যাউক FMB এবং MND কোণদ্বয় সমান, এবং H বিন্দুর মধ্য দিয়া MN রেখার মধ্যবিন্দু CD রেখার উপর LK লম্ব অঙ্কন করিয়াছে। অনন্তর, অনুরূপভাবে AB রেখার লম্ব হইল LK। কেননা LMH ও KNH দুইটি ত্রিভুজই (3) দ্বারা সমান।

উপপাদ্য ১১ঃ যদি দুইটি সমান দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট রেখা একটি সমতলে একটি প্রদত্ত রেখার উপর লম্বভাবে উপস্থাপিত করা হয়, উহাদের প্রান্তসীমা সংযোগকারী রেখা উহাদের সঙ্গে সমান কোণের সৃষ্টি করে এবং উহাদের মধ্যপথে উপস্থাপিত তৃতীয় লম্ব দ্বারা সমকোণে দ্বিখণ্ডিত হয়।



ধরা যাউক, AC ও BD রেখা AB র উপর লম্ব, এবং মনে করা যাউক AC ও

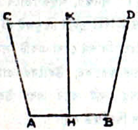
BD সমান। C ও D তে কোণ সমূহ এই দুই বিন্দুকে সংযুক্তকারী রেখা দ্বারা গঠিত হইতেছে, উহারা সমান এবং AB র মধ্য বিন্দুতে HK লম্ব উহার মধ্য বিন্দুতে CD র লম্ব।

উপরিপত্তি দ্বারা প্রমাণিত।

উপপাদ্য ১২ ঃ পূর্ব প্রতিজ্ঞাতে যেমন দুইটি লম্ব এবং একটি তৃতীয় লম্ব উহাদের মধ্যে অবস্থিত এই রেখাপথে উপস্থাপিত হইয়াছে; যদি কোন রেখা এই তৃতীয় লম্বকে সমকোণে খণ্ডিত করে, এবং যদি এই রেখা পূর্বোক্ত লম্ব দুইটিকে আদৌ খণ্ডিত করে তাহা হইলে এমন ভাবে ছেদ করিবে যাহাতে উভয়ের সঙ্গেই সমান কোণ উৎপন্ন করিবে এবং সমান দৈর্ঘ্যে খণ্ডিত করিবে।

উপরিপত্তির দ্বারা প্রমাণিত।

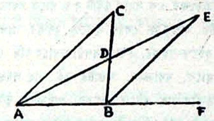
অনুসিদ্ধান্ত : শেষোক্ত দুইটি প্রতিজ্ঞা সত্য হইতেছে যদি AB র মধ্য বিন্দুতে HK লম্ব হইয়া, A ও B কোণগুলি সমান সূক্ষ্ম অথবা সমান স্থূল কোণ হয়। যদি AC=BD, C ও D তে কোণগুলি সমান হয় এবং CD র মধ্য বিন্দুতে HK লম্ব হয়; কিম্বা, যদি কোন বিন্দুতে CD, HK র লম্ব হয় K ও প্রতিচ্ছেদ্য AC ও BD এই দুই রেখার উপর সম পরিমাণ দূরত্বকে খণ্ডিত করিবে এবং উহাদের সঙ্গে সমান কোণ সৃষ্টি করিবে।



২—নিয়ন্ত্রিত চিত্রের জন্য যে সকল প্রতিজ্ঞা সত্য

নিম্নবর্ণিত প্রতিজ্ঞাসমূহ অন্ততপক্ষে চিত্রের জন্যই সত্য যাহাদের রেখাগুলি নিশ্চিত কিছু দৈর্ঘ্য উহাদের সীমা ও মাত্রা ছাড়াইয়া যায় নাই। অর্থাৎ যদি কোন ব্যতিক্রম ঘটে ইহা এমন একটি ব্যাপার, যেখানে কিছু কিছু রেখার দৈর্ঘ্যের নিমিত্ত আমরা উপপাদ্য প্রয়োগ করিতে পারি না অথবা প্রমাণ করিবার জন্যও অগ্রসর হইতে পারি না। এই অর্থে, সুবিধার

জন্য আমরা নিয়ন্ত্রিত শব্দটি ব্যবহার করিব এবং একটি উপপাদ্য নিয়ন্ত্রিত চিত্র অথবা সমতলের নিয়ন্ত্রিত যে কোন অংশের জন্যই সত্য।

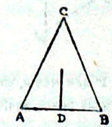


উপপাদ্য ১ ঃ একটি ত্রিভুজের বহিঃকোণ যে কোন বিপরীত অন্তস্থ: কোণ হইতে বৃহত্তর (ইউক্লিড, ১, ১৬)।

প্রমাণ : A হইতে বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দু পর্যন্ত AD অঙ্কন কর এবং ইহাকে B পর্যন্ত বর্দ্ধিত কর DE=AD করিয়া গঠিত ADC ও EBD ত্রিভুজ দুইটি সমান, এবং FBD কোণ EBD কোণ হইতে বৃহত্তর হওয়াতে C হইতে বৃহত্তর।

অনুসিদ্ধান্ত ঃ অন্ততঃ একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ সূক্ষ্ম কোণ হইবে।

উপপাদ্য ২ ঃ যদি একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ সমান হয়, বিপরীত বাহুগুলি সমান হয়, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ হইবে।



প্রমাণ : ভূমির মধ্য বিন্দুতে উপস্থাপিত লম্ব ত্রিভুজটিকে দুইটি চিত্রে ভাগ করে যাহা সদৃশ হইবার জন্য গঠিত হইতে পারে এবং সমান হয়। এই লম্ব যেহেতু শীর্ষের ভিতর অতিক্রম করে এবং ত্রিভুজের সমান কোণের বিপরীত দুই বাহু সমান।

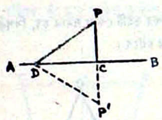
উপপাদ্য ৩ ঃ একটি ত্রিভুজের অসমান কোণ লইয়া দুই কোণের বৃহত্তর বিপরীত বাহু ক্ষুদ্রতর বিপরীত বাহু হইতে বৃহত্তর হয়। বিপরীতভাবে যদি একটি ত্রিভুজের বাহুগুলি

অসমান হয় বিপরীত কোণগুলিও অসমান হইবে এবং বৃহত্তর বাহুর বিপরীতে অবস্থান করিবে।

উপপাদ্য ৪ঃ যদি দুইটি ত্রিভুজের এক সমান দুইটি বাহু থাকে যথাক্রমে, অন্যটির দুই বাহু পর্যন্ত, কিন্তু প্রথমটির অন্তর্ভুক্ত কোণ হইতে বৃহত্তর, প্রথমটির তৃতীয় বাহু দ্বিতীয়টির তৃতীয় বাহু হইতে বৃহত্তর, এবং বিপরীতভাবে যদি দুইটি ত্রিভুজের এক সমান দুইটি বাহু থাকে, যথাক্রমে, অন্যটির দুই বাহু পর্যন্ত, কিন্তু প্রথমটির তৃতীয় বাহু দ্বিতীয়টির তৃতীয় বাহু হইতে বৃহত্তর, প্রথমটির তৃতীয় বাহুর বিপরীত কোণ দ্বিতীয়টির তৃতীয় বাহুর বিপরীত কোণ হইতে বৃহত্তর।

উপপাদ্য ৫ঃ একটি সরল রেখার প্রান্তদেশ পর্যন্ত যে কোন বিন্দু হইতে অঙ্কিত দুইটি রেখার যোগফল, অনুরূপভাবে অঙ্কিত কিন্তু উহাদের দ্বারা অন্তর্ভুক্ত দুইটি রেখার যোগফল হইতে বৃহত্তর।

উপপাদ্য ৬ঃ যে কোন বিন্দুর ভিতর দিয়া একটি সরলরেখার উপর কেবল মাত্র একটি লম্বই অঙ্কিত হইতে পারে।



প্রমাণ: ধরা যাউক P' হইল অবস্থান, যদি সমতলকে AB র কাছাকাছি ইহার সহিত সমাপতনের ভিতরে আবর্তিত করা হয় তাহা ঐ অবস্থান P অধিকার করিবে।

P হইতে AB পর্যন্ত PC ও PD যদি আমাদের এই দুইটি লম্ব থাকিত অনন্তর উহারা CP' ও DP' রেখার ধারাবাহিকতা হইতে পারিত এবং অসম্ভব হইলেও আমাদের দুইটি ভিন্ন সরল রেখা P ও P' কে সংযুক্ত করিতেছে থাকা উচিত ছিল।

অনুসিদ্ধান্তঃ দুইটি সমকোণী ত্রিভুজ সমান হয় যখন একটির অতিভুজ এবং একটি সূক্ষ্ম কোণ সমান হয় যথাক্রমে, অন্যটির অতিভুজ এবং একটি সূক্ষ্ম কোণ পর্যন্ত।

উপপাদ্য ৭ঃ লম্বই হইতেছে সংক্ষিপ্ত রেখা যাহা একটি বিন্দু হইতে একটি সরলরেখা পর্যন্ত অঙ্কন করা যাইতে পারে।

অনুসিদ্ধান্তঃ একটি সমকোণী ত্রিভুজে সমকোণের কাছাকাছি অতিভুজ যে কোন বাহু হইতে বৃহত্তর।

উপপাদ্য ৮ঃ লম্বের পাদদেশ হইতে একটি রেখা পর্যন্ত অসমান দূরত্বকে খণ্ডিত করিতেছে কোন বিন্দু হইতে একটি লম্বে যদি বক্ররেখা টানা হয় উহারা অসমান হইবে, এবং আরও বেশী দূরব্যবধান বিশিষ্ট বৃহত্তর হইবে; এবং বিপরীত ভাবে একটি বিন্দু হইতে একটি লম্বে যদি দুইটি বক্র রেখা টানা হয় উহারা অসমান হইবে, বৃহত্তরটি লম্বের পাদদেশ হইতে বৃহত্তর দূরত্বকে খণ্ডিত করিবে।

উপপাদ্য ৯ঃ একটি সরল রেখার মধ্য বিন্দুতে যদি একটি লম্ব উপস্থাপিত করা হয়, লম্বে নাই এমন যে কোন বিন্দু লম্বের একই বাহুতে রেখার প্রান্ত সীমার সন্নিকটবর্তী।

অনুসিদ্ধান্তঃ একটি সরলরেখার প্রান্তসীমা হইতে দুইটি বিন্দু সমদূরবর্তী রেখা পর্যন্ত উহার মধ্য বিন্দুতে একটি লম্ব ধার্য করে।

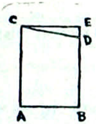
উপপাদ্য ১০ঃ দুইটি ত্রিভুজের এক সমান বাহু থাকিলে যথাক্রমে অন্যটির তিন বাহু পর্যন্ত উহারা সমান হয়।

উপপাদ্য ১১ঃ একটি সমতলে যদি দুইটি রেখা তৃতীয়টির উপর লম্বভাবে উপস্থাপিত হয় উহারা অসমান হইবে, উহাদের প্রান্তসীমা সংযুক্তকারী রেখা উহাদের সঙ্গে মিলিত হইয়া বৃহত্তর কোণ ক্ষুদ্রতর লম্ব সমেত অসমান কোণের সৃষ্টি করে।

প্রমাণ: মনে করি AC=BD। উদ্ভূত BD,BE=AC সৃষ্ট করিতেছে। অনন্তর BEC=ACE। কিন্তু BDC=BEC (1) দ্বারা এবং ACD হইতেছে ACE র অংশ। অতএব, BDC=ACD।

উপপাদ্য ১২ঃ যদি C ও D তে দুইটি কোণ সমান হয়, লম্বগুলিও সমান এবং কোণগুলি যদি অসমান হয় লম্বগুলিও অসমান এবং দীর্ঘতর লম্ব ক্ষুদ্রতর কোণ সৃষ্টি করে।

উপপাদ্য ১৩ঃ যদি দুইটি রেখা তৃতীয় রেখার উপর লম্ব হয়, তৃতীয় রেখা হইতে যে কোন সমদূরবর্তী বিন্দুগুলি অন্যগুলি হইতেও সমদূরবর্তী হয়।



প্রমাণ: ধরা যাউক AB ও CD, HK র উপর লম্ব এবং CD র উপরে যে কোন দুইটি বিন্দু লইলে, C ও D, K হইতে সমদূরবর্তী হয়, অনন্তর C ও D, AB হইতে সমদূরবর্তী হইবে। উপরিপত্তির দ্বারা আমরা D র উপর D কে পতিত করিতে পারি এবং অনন্তর DB, CA র সঙ্গে (6) দ্বারা সদৃশ হইবে।

নিম্নবর্ণিত ঘন জ্যামিতির (Solid Geometry) প্রতিজ্ঞাসমূহ প্রত্যক্ষ ভাবে পূর্ববর্তিতার উপর নির্ভরশীল এবং অন্ততঃ স্থানের যে কোন নিয়ন্ত্রিত অংশের জন্য সত্যকে ধারণ করে।

উপপাদ্য ১৪ঃ যদি একটি রেখা দুইটি প্রতিচ্ছেদকারী রেখার প্রতিচ্ছেদে উহাদের লম্ব হয়, উক্ত রেখা এই বিন্দুর মধ্যে অতিক্রমকারী উহাদের সমতলের প্রত্যেকটি রেখারই লম্ব হইবে।

উপপাদ্য ১৫ঃ যদি দুইটি সমতল লম্ব হয়, একটি লম্বে উহাদের প্রতিচ্ছেদ পর্যন্ত একটি রেখা অঙ্কিত হইলে একটি অন্যটির লম্ব হয় এবং একটি লম্বের যে কোন বিন্দুর মধ্য দিয়া অঙ্কিত একটি রেখা অন্যটি পর্যন্ত সম্পূর্ণ ভাবে প্রথমটির উপর অবস্থান করে।

উপপাদ্য ১৬ঃ যদি একটি রেখা একটি সমতল পর্যন্ত লম্ব হয় যে কোন সমতল ঐ রেখার ভিতরে সমতলের কাছে লম্ব হইবে।

উপপাদ্য ১৭ঃ যদি একটি সমতল দুইটি প্রতিচ্ছেদকারী সমতলের প্রত্যেকটিরই কাছে লম্ব হয়, এই সমতল উহাদের প্রতিচ্ছেদ পর্যন্ত লম্ব হইবে।

Non-Euclidean Geometry by Manning হইতে বেলাল চৌধুরী কর্তৃক অনূদিত।