KALIKATA LITTLE MAGAZINE LIBRARY-O-GABESHANA KENDRA
18/M TAMER LANE, KOLKATA-700009

Record No. : KLMLGK 2007	Place of Publication ম্যাজেস্টিক সার্ভিস ৭৭/২ মহাত্মা গান্ধী রোড, কল-৯
Collection : KLMLGK	Publisher কমলকুমার মজুমদার
Title অঙ্কভাবনা	Size 7" x 9.5" 17.78 x 24.13 c.m.
Vol. & Number : 1/1 1/2	Year of Publication Jan, 1965 April-June 1965
	Condition : Brittle Good
Editor : কমলকুমার মজুমদার, আনন্দমোহন ঘোষ	Remarks :

C.D. Roll No. KLMLGK

অঙ্ক ভাবনা

প্রথম বর্ষ, প্রথম সংখ্যা

॥ সূচীপত্র ॥

॥ **সম্পাদক** ॥

কমলকুমার মজুমদার ০ আনন্দমোহন ঘোষ

—প্রচ্ছদ চিত্র—

প্রাচীন ঈজিপ্তীয় পরিমাপের বাটখারা।

কমলকুমার মজুমদার কর্ত্তৃক ম্যাণ্ডেভিল গার্ডেনস হইতে প্রকাশিত
মডার্ন ইণ্ডিয়া প্রেস, ৭ রাজা সুবোধ মল্লিক স্কোয়ার, কলিকাতা-১৩
হইতে অজয় দাশগুপ্ত দ্বারা মুদ্রিত।

অঙ্ক ভাবনা ১ম বর্ষ, ১ম সংখ্যা জানুয়ারী,

॥ সম্পাদকীয় ॥

অঙ্কভাবনা পত্রিকার প্রথম সংখ্যা বহুদিন যাবৎ বিলম্বের পর প্রকাশ সম্ভব হইল ; আমাদের গ্রাহকবর্গ এই অনিচ্ছাকৃত বিলম্বের জন্য যে ধৈর্য্য পরীক্ষা দিয়াছেন তাহার জন্য আমরা কৃতজ্ঞ, একথা স্বীকার্য্য যে তাঁদের শুভকামনা ব্যতীত এ কার্য্য সম্ভব হইত না।

ইদানীং আমাদের দেশে খোশ গল্প ও পদ্যের যথেষ্ট মান, অন্য যে কোন বিষয়ক আলোচনাই পথভ্রষ্ট হইয়াছে ; অথচ, একদা যে সকল বিষয়ে, পুরাতন পত্রিকা পুস্তকাদি পাঠে জানা যায় যে বাঙলার জনসাধারণ খুবই আগ্রহশীল ছিল ; এখনকার দু'য়েকটি বিজ্ঞানতত্ত্ব পত্রিকার চেহারা দেখিলে নিশ্চিত ধারণা জন্মিবে মুষ্টিমেয় উৎসাহীর আশায় তাহা বাঁচিয়া আছে, ইহা সত্ত্বেও আমরা নিরাশ হই নাই।

অঙ্কশাস্ত্র সম্পর্কে বঙ্গভাষায় ইতঃপূর্ব্বে কোন পত্রিকা ছিল না, জিজ্ঞাসুমাত্রেই স্বীকার করিবেন, এই জাতীয় চেষ্টার প্রয়োজন আছে। বিদেশী ভাষা অভিজ্ঞ ব্যক্তিগণ বলিয়া থাকেন, বাঙলায় ইহার সার্থকতা নাই ; কিন্তু যদি ভাবিয়া বুঝিয়া দেখা যায়, তাহা হইলে সম্যক উপলব্ধি হইবে যে কয়েক বৎসর কাল হইল স্রোত ঘুরিয়াছে, বঙ্গভাষায় বিবিধ তত্ত্ব আলোচনার পাঠ্যপুস্তক প্রণীত হইতেছে, ফলে সহজেই আমরা বিশ্বাস করি, অঙ্কতত্ত্ব যাহাতে সুবিচারিত চিত্তে অনুশীলনকারীরা ধারণা করিতে সমর্থ হয় তাহার জন্য তথ্যসকল বঙ্গভাষায় হওয়াই একমাত্র উপায়। যেহেতু অঙ্কশাস্ত্র সকলতত্ত্বের সম্বন্ধের আদি কারণ, ইহাই শক্তি এবং মাতৃস্থানীয়, সৎ এবং অসৎ, বিচারের জন্যত, প্রকৃষ্ট ন্যায় এবং বিজ্ঞানের— বিজ্ঞানচিন্তার মূল।

এইরূপ তত্ত্ব অনিসন্ধিৎসু পত্রিকা বঙ্গভাষায় প্রকাশে কয়েকটি কঠিন বাধার সম্মুখীন হইতে হয় ; প্রথমত ভাবপরিধির দিক দিয়া অনেকেই বিশেষ আগ্রহান্বিত হন, এবং অনুবাদ ব্যাপারে তাঁহাদের উপর স্বভাবতই নির্ভর করিতে হয়, ক্রমে দেখা

গেল কোন না কোন কারণে তাঁহারা প্রতিজ্ঞাভঙ্গ করিতে বাধ্য হইলেন, তাই আমাদের বিজ্ঞপ্তি অনুসারে সকল কিছুই যথাবিহিত পত্রস্থ করা ঘটিয়া উঠিল না। ইহার পর ছাপার অক্ষর বা টাইপ ব্যাপার উত্থাপন করা যায় ; অঙ্কশাস্ত্র অনুযায়ী অজস্র প্রতীক চিহ্ন এবং প্রাচীন রাশি-মালা আছে, বিশেষত হ্যাণ্ড-সেটএ তাহা ছাপিবার অক্ষর নাই বলিলেই হয়, অবশ্য এক আধটি টাইপ ফাউনড্রী দুই চারিটি মাত্র অক্ষর নির্ম্মাণ করে, ফলে আমাদের কল্পনা অনুযায়ী 'আর্কইমিডিসের পাটিগণিত' ভাষান্তরিত করা স্থগিত রাখিতে হইল। এখানে প্রকাশ থাক, যদিও সকল প্রতীক ও রাশি-মালার অক্ষর-কাটান অনেক অর্থব্যয় সাপেক্ষ তথাপি আমরা ইহার ব্যবস্থা করিতেছি।

আমাদের উদ্দেশ্য, অঙ্কশাস্ত্র জিজ্ঞাসু পাঠকবর্গকে অঙ্কধারা সম্পর্কে জ্ঞাত করা—কারণ ইতিহাস জানার মূল্য আমরা নিশ্চয় সকলেই স্বীকার করিব—ইহা ব্যতীত আমাদের পাঠ্যক্রম যাহাতে অত্যন্ত আধুনিক-নিয়ম অনুযায়ী হয় তাহার আভাস দেওয়া ; এই সংখ্যায় সেই জন্য আমরা 'বিমান গতিবিধির অঙ্ক' বিষয়ে আলোচনা করিলাম।

অনুবাদ বিষয়ে আশঙ্কা হয়, অনেক ভুলভ্রান্তি রহিয়া যাওয়া স্বাভাবিক ; সে সম্পর্কে আমাদের জানাইলে আমরা বিশেষ বাধিত হইব। পত্রিকার নামকরণে অধ্যাপক শ্রীনির্মাল্য আচার্য্য মহাশয়ের নিকট আমরা কৃতজ্ঞ রহিলাম।

এই পত্রিকা শ্রীযুক্ত সতীকান্ত গুহ মহাশয়ের সৌজন্যে প্রকাশ সম্ভব হইল।

॥ লীলাবতী ॥

প্রথমোঽধ্যায়ঃ

প্রীতিং ভক্তজনস্য যো জনয়তে বিঘ্নং বির্নিঘ্নন্ স্মৃতস্তং বৃন্দারকবৃন্দ বন্দিত পদং নত্বা মতঙ্গননম্ পাটীং সদ্গণিতস্য বচ্মি চতুর প্রীতিপ্রদাং প্রস্ফুটাং সঙ্খিপ্তাক্ষর কোমলামলপদৈর্লালিত্য লীলাবতীম্ ॥ ১

যিনি বিঘ্ন বিনাশ করিয়া ভক্তজনের প্রীতি উৎপাদন করেন, যাঁহার পদযুগল দেবগণ কর্ত্তৃক পূজিত হয়, সেই গজাননকে নমস্কার করিয়া এই সহজ আনন্দদায়ক, পরিস্ফুট, সংক্ষিপ্ত অতি কোমল ও বিশুদ্ধ পদের দ্বারা রচিত লীলাবতী নামক গণিতের এই পাটীগণিত গ্রন্থ বলিতেছি।

বরাটকানাং দশকদ্বয়ং (২০) যৎ সা কাকিণী তাশ্চ পণশ্চতস্রঃ।
তে ষোড়শদ্রম্ম ইহাবগম্যো দ্রম্মৈস্তথা ষোড়শভিশ্চ নিষ্কঃ। ২

দ্বিগুণিত দশ অর্থাৎ বিংশতি সংখ্যক কড়িকে কাকিণী বলে। এইরূপ চারিটিকে পণ বলে। এইরূপ ষোলটিকে দ্রম্ম বলে। এইরূপ ষোলটি দ্রম্মকে নিষ্ক বলে। ২

তুল্যা যবাভ্যাং কথিতাত্র গুঞ্জা বল্লস্ত্রিগুঞ্জো ধরণঞ্চ তেঽষ্টৌ।
গদ্যানকস্তদ্ দ্বয়মিন্দুতুল্যৈ বঁল্লৈস্তথৈকো ধটকঃপ্রদিষ্টঃ ॥ ৩

দুটি যবের সমপরিমাণ ওজনকে গুঞ্জা বলে। এইরূপ তিনটি গুঞ্জাকে বল্ল বলে, এবং আটটিকে ধরণ বলে। এইরূপ দুইটিকে গদ্যানক বলে। এইরূপ চতুর্দ্দশ বল্লে এক ধটক হয়। ৩

দশার্দ্ধংগুঞ্জং প্রবদন্তি মাষং মাষাহ্বয়ৈঃ ষোড়শভিশ্চ কর্ষম্।
কর্ষৈশ্চতুর্ভিশ্চ পাদং তুলাজ্ঞা কর্ষং সুবর্ণস্য সুবর্ণসংজ্ঞম্ ॥ ৪

দশার্দ্ধ গুঞ্জাকে মাষ বলে, ষোল মাষকে কর্ষ বলে, চারিকর্ষে এক পল। এক কর্ষ সোণাকে সুবর্ণ বলে। ৪

যবোদরৈরঙ্গুলমষ্টসঙ্খ্যৈ হস্তোঽঙ্গুলৈঃ ষড়গুণিতৈশ্চতুর্ভিঃ।
হস্তৈশ্চতুর্ভিভতীহদণ্ডঃ ক্রোশঃ সহস্র দ্বিতয়েন তেষাম্ ॥ ৫

আটটি যবের পরিমাণ এক অঙ্গুলি। চব্বিশ অঙ্গুলিতে এক হস্ত। চারি হস্তে এক দণ্ড। দুই হাজার দণ্ডে একক্রোশ হয়।

স্যাদযোজনং ক্রোশচতুষ্টয়েন তথা করাণাং দশকেন বংশঃ।
নিবর্ত্তনং বিংশতিবংশ সঙ্খ্যৈঃ ক্ষেত্রং চতুর্ভিশ্চভুজৈর্নিবদ্ধম্ ॥ ৬

চারিক্রোশে এক যোজন। দশ হাতে এক বংশ। চারিদিকে সম পরিমাণ বিংশতি বংশকে অথবা চারিবাহু দ্বারা সীমাবদ্ধ স্থানকে ক্ষেত্র অথবা নিবর্ত্তন বলে। ৬

হস্তোন্মিতৈর্বিস্তৃতি দৈর্ঘ্য পিণ্ডৈর্যদ্দ্বাদশাস্রং ঘনহস্তসংজ্ঞম্।
ধান্যাদিকে যদ্ ঘনহস্তমানং শাস্ত্রোদিতা মাগধখারিকা সা॥

একহাত পরিমাণ দৈর্ঘ্য বিস্তার ও উচ্চতাযুক্ত মাপকে ঘনহস্ত বলে। ধান্যাদির মাপের সময় এইরূপ ঘনহস্তকে শাস্ত্রে খারি অথবা মাগধ বলে। ৭

দ্রোণস্তু খার্য্যাঃ খলু ষোড়শাংশঃ স্যাদাঢকো দ্রোণচতুর্থভাগঃ।
প্রস্থশ্চতুর্থাংশ ইহাঢ়কস্য প্রস্থাঙ্ঘ্রিরাদ্যৈঃ কুড়বঃ প্রদিষ্টঃ॥

এক খারির একের ষোল অংশকে দ্রোণ বলে। এক দ্রোণের একের চতুর্থাংশকে আঢ়ক বলে। এক আঢ়কের এক চতুর্থাংশকে কুড়ক বলে। ৮

পাদোন গদ্যানক তুল্যটঙ্কৈর্দ্বিসপ্ততুল্যৈঃ কথিতোহত্র সেরঃ।
মণাভিধানং খযুগৈশ্চ সেরৈর্ধান্যাদি তৌলেষু তুরুষ্ক সংজ্ঞা॥

তিনের চার অংশ গদ্যানক এর তুল্য টঙ্কা চতুর্দ্দশ হইলে একসের হইবে। চল্লিশ সেরে একমণ হইবে। ধান্য বা তজ্জাতীয় দ্রব্য ওজনের জন্য তুরস্কগণ কর্ত্তৃক এইরূপ ব্যবহৃত হয়।

শেষা কালাদিপরিভাষা লোকতঃ প্রসিদ্ধা জ্ঞেয়া।

ইহার অবশিষ্ট কাল প্রভৃতি পরিভাষা লোকে প্রসিদ্ধ আছে।

দ্বিতীয়োঽধ্যায়ঃ

(প্রথমঃ পরিচ্ছেদ)

লীলাগললুলল্লো লকালব্যাল বিলাসিনে।
গণেশায় নমো নীল কমলামল কান্তয়ে॥

যাহার গলদেশে, আনন্দে দোদুল্যমান কালসর্প বিরাজিত; যাহার বর্ণ নীল নিষ্কলুষ পদ্মের ন্যায় সেই গণেশকে নমস্কার।

এক দশ শত সহস্রাযুতলক্ষ প্রযুত কোটয়ঃ ক্রমশঃ।
অর্বুদমব্জং খর্বঃ নিখর্বঃ মহাপদ্ম শঙ্খবস্তস্মাৎ।
জলধিশ্চান্ত্যং মধ্যং পরার্দ্ধমিতি দশগুণোত্তরাঃ সংজ্ঞাঃ।
সংখ্যায়াঃ স্থানানাং ব্যবহারার্থং কৃতাঃ পূর্ব্বৈঃ॥ ১০-১১

পূর্ব্বাচার্য্যগণ সংখ্যার স্থান এইরূপে নির্দ্দেশ করিয়াছেন যে একক দশক শতক সহস্র লক্ষ অযুত কোটি অর্বুদ পদ্ম খর্ব নিখর্ব মহাপদ্ম শঙ্খ সমুদ্র অন্ত মধ্য পরার্দ্ধ এইরূপ সংখ্যাগুলি দশ গুনিত।

(দ্বিতীয়ঃ পরিচ্ছেদ)

অথ সঙ্কলিত ব্যবকলিতয়োঃ করণসূত্রং বৃত্তার্দ্ধম্।
কার্য্যঃ ক্রমাদুৎক্রমতোঽথবাঙ্কযোগো যথাস্থানক মন্তরংবা॥ ১২

যোগ ও বিয়োগের নিয়মাবলি অর্দ্ধ পরিচ্ছেদ পর্য্যন্ত। সংখ্যাগুলির যোগ তাহাদের স্থানের ক্রম অনুসারে গ্রহণ করিতে হইবে এবং বিয়োগ তাহাদের পার্থক্য অনুসারে গ্রহণ করিতে হইবে।

অত্রাদ্দেশকঃ। অয়ে বালে লীলাবতি মতিমতি ব্রূহি সহিতান্ দ্বিপঞ্চ দ্বাত্রিংশৎ ত্রিনবতি শতাষ্টাদশ দশ। শতো পেতানেতানযুত বিযুতাংশ্চাপি বদমে যদি বক্ত্রে যুক্তি ব্যবকলন মার্গেঽসি কুশলা॥ ১৩

ইহার উদাহরণ। হে বুদ্ধিমতি কন্যে লীলাবতি! যদি তুমি যোগ ও বিয়োগ ব্যাপারে দক্ষা হও তাহা হইলে বল—দুই, পাঁচ, বত্রিশ, একশত তিরানব্বই, আঠার দশ ও একশত সংখ্যার যোগফল কত?

ন্যাসঃ—২, ৫, ৩২, ১৯৩, ১৮, ১০, ১০০।

যোগফল=৩৬০। সংযোজনাজ্জাতম্। যোগ করিয়া হইল।

অযুতা (১০০০০) চ্ছোধিতে জাতম্। ৯৬৪০

১০০০০ − ৩৬০ = ৯৬৪০ বিয়োগফল।

ইতি সঙ্কলিত ব্যবকলিতে। এইরূপ যোগ ও বিয়োগের প্রণালী।

গুণনে করণসূত্রং সার্দ্ধবৃত্তদ্বয়ম্। গুণ্যান্ত্যমঙ্কং গুণকেন হন্যাদুৎসারি তেনৈব মুপান্তিমাদীন্। গুণ্যস্ত্বধোঽধোগুণ খণ্ডতুল্যস্তৈঃ খণ্ডকৈঃ সঙ্গুণিতো যুতো বা। ভক্তোগুণঃ শুধ্যতি যেন তেন লব্ধ্যা চ গুণ্যো গুণিতঃ ফলংবা। দ্বিধা ভবেদ্রূপবিভাগ এবং স্থানৈঃ পৃথগ্ বা গুণিতঃ সমেতঃ ইষ্টোনযুক্তেন গুণেন নিঘ্নোঽভীষ্টঘ্ন গুণ্যান্বিত বর্জ্জিতো বা। ১৪-১৫

গুণের নিয়মাবলী আড়াই পরিচ্ছেদ পর্য্যন্ত। গুণ্যের (অর্থাৎ যাহাকে গুণ করিতে হইবে) শেষ সংখ্যাকে গুণকের দ্বারা গুণ করিতে হইবে। তাহার পরের সংখ্যাকে আবার তাহার পরের সংখ্যাকে অথবা গুণ্যকে গুণকের দ্বারা পৃথক্ পৃথক্ গুণ করিয়া রাখিতে হইবে, পরে সমস্ত সংখ্যাগুলি যোগ করিতে হইবে। অথবা গুণককে কতকগুলি অংশে বিভক্ত করিয়া তাহার দ্বারা গুণ করিতে হইবে। এইরূপ গুণনের দুইটি বিভাগ দেখা যায়। অথবা পৃথক্ পৃথক্ ভাবে স্থানীয় সংখ্যাকে গুণ করিতে হইবে পরে সমস্তগুলি একত্রে যোগ করিতে হইবে। অথবা যে কোন রাশি বর্দ্ধিত করিয়া বা অল্প করিয়া লইয়া তাহার দ্বারা গুণ করিতে হইবে, পরে গুণফলকে যোগ করিতে হইবে বা গুণফল হইতে বিয়োগ করিতে হইবে।

অত্রোদ্দেশকঃ। বালে বালকুরঙ্গলোলনয়নে লীলাবতি প্রোচ্যতাং পঞ্চত্র্যেক মিতাদ্দিবাকরগুণা অঙ্কাঃ কতিস্যুর্যদি। রূপস্থানবিভাগ খণ্ডগুণনে কল্যাণি কল্যাণিনি ছিন্নাস্তেন গুণেন তে চ গুণিতাজ্জাতাঃ কতি স্যুর্বদ। ১৬

ইহার উদাহরণ। হে মৃগশাবকের ন্যায় চঞ্চল নয়নে কন্যে লীলাবতি! একশত পঁয়ত্রিশকে বার দ্বারা গুণ করিলে কত হইবে বল। হে কল্যাণি! বিভিন্ন অংশ দ্বারা খণ্ড গুণনেই বা কিরূপ হইবে বল।

ন্যাসঃ। গুণ্যঃ ১৩৫। গুণকঃ ১২

দৃষ্টান্ত। গুণ্য ১৩৫ গুণক ১২

গুণ্যস্ত্যমঙ্কং গুণকেন হন্যাদিতি কৃতে জাতম্। ১৬২০। গুণ্য এর শেষ অঙ্ককে গুণকের দ্বারা গুণ করিলে ১৬২০ হইল। অথবা গুণরূপ বিভাগে খণ্ডেকৃতে—৮। ৪ আভ্যাং পৃথগ্ গুণ্যে গুণিতে যুতে চ জাতং তদেব। ১৬২০।

অথবা খণ্ড খণ্ড করিয়া গুণ করিলে যথা প্রথমে ৮ দ্বারা গুণ করিয়া ১০৮০ হইল পরে ৪ দ্বারা গুণ করিলে ৫৪০ হইল। এইবার এই দুইটি সংখ্যা যোগ করিলে ১৬২০ হইবে।

অথবা গুণ্যক স্ত্রিভির্ভক্তোলব্ধং। ৪। এভিস্ত্রিভিঃ। ৩ বা গুণ্যে গুনিতে জাতং তদেব। ১৬২০

অথবা গুণ্যককে তিন দ্বারা ভাগ করিয়া যে ৪ পাওয়া যাইল তাহার দ্বারা এবং ৩ দ্বারা গুণ্যকে গুণ করিলে উভয়ের যোগফল ১৬২০ হইবে।

অথবা স্থান বিভাগে খণ্ডে ১। ২। আভ্যাং পৃথগ্ গুণ্যে গুণিতে যথাস্থান যুতে চ জাতং তদেব। ১৬২০।

অথবা ১২ এই সংখ্যাকে স্থানের বিভাগ করিয়া খণ্ড করিয়া লইয়া অর্থাৎ প্রথমে দুই দ্বারা পরে ১ দ্বারা গুণ্যকে গুণ করিয়া যোগ করিলে ১৬২০ হইবে।

অথবা দ্ব্যূনেন গুণেন (১০) দ্বাভ্যাঞ্চ (২) পৃথগ্ গুণ্যে গুণিতে যুতে চ জাতং তদেব ১৬২০।

অথবা ১২ হইতে দুই কম করিয়া লইয়া অর্থাৎ ১০ দ্বারা এবং পরে ২ দ্বারা গুণ্যকে পৃথক্ পৃথক্ গুণ করিয়া পরে যোগ করিলে ১৬২০ হইবে।

অথবাষ্টযুতেন গুণেন (২) গুণ্যে গুণিতেঽষ্ট (৮) গুণিত গুণ্য হীনে চ জাতং তদেব ১৬২০।

অথবা গুণকের সহিত ৮ যোগ করিয়া অর্থাৎ কুড়ি করিয়া লইয়া তাহার দ্বারা গুণ্যের সহিত গুণ করিলে, এবং গুণ্যের সহিত ৮ দ্বারা গুণ করিলে পরে উভয়ের বিয়োগ করিলে ১৬২০ হইবে।

ইতি গুণন প্রকারঃ।

এইরূপ গুণের রীতি।

ভাগহারে করণ সূত্রং বৃত্তম। ভাজ্যাদ্ধরঃ শুধ্যতি যদ্গুণঃ স্যাদন্ত্যাৎ ফলং তৎ খলু ভাগহারে।
সমেন কেনাপ্য প্রবর্ত্য হার ভাজ্যৌ ভজেদ্বা সতি সম্ভবে তু। ১৭

ভাগের বিষয়ে নিয়ম একটি। ভাজ্য হইতে হর পাওয়া যায় ভাজ্যকে গুণ করিলে ভাজকের শেষ সংখ্যা পাওয়া যায়, ইহাই ভাগের ভাগফল অথবা সম্ভব হইলে কোন ক্ষুদ্র সংখ্যায় যাহা ভাজ্য ও ভাজকের মধ্যে সাধারণ রাশি তাহার দ্বারা ভাগ করিলে ভাগফল পাওয়া যায়।

অত্র পূর্ব্বোদাহরণে গুণিতাঙ্কানাং দ্বিগুণচ্ছেদানাং ভাগহারার্থং ন্যাসঃ ভাজ্যঃ। ১৬২০

ভাজকঃ ১২।

ভজনাল্লব্ধো গুণ্যঃ। ১৩৫

পূর্ব্বে গুণের উদাহরণে গুণিত অঙ্কগুলির নিজ গুণচ্ছেদ সমূহের ভাগের বিষয়ে ভাজ্য হইল ১৬২০।

ভাজক—১২

ভাগ করিয়া ভাগফল পাওয়া যাইল আগের গুণ্য ১৩৫।

অথবা ভাজ্যহারৌ ত্রিভিরপবর্ত্তিতৌ ৫৪০/৪ চতুর্ভির্বা ৪০৫/৩ স্ব স্ব হারেণ কৃতে ফলং তদেব। ১৩৫।

অথবা ভাজ্যকে তিন দ্বারা ভাগ করিলে যে ফল হইবে, তাহাকে চার দ্বারা ভাগ করিতে হইবে বা ভাজ্যকে ৪ দ্বারা ভাগ করিলে যে ফল হইবে, তাহাকে তিন দ্বারা ভাগ করিতে হইবে অর্থাৎ ৫৪০ ÷ ৪ = ১৩৫ এবং ৪০৫ ÷ ৩ = ১৩৫ ভাগফল হইবে।

ইতি ভাগহারঃ।

এইরূপ ভাগের নিয়ম।

বর্গে করণসূত্রং বৃত্তদ্বয়ম্। সমদ্বিঘাতঃ কৃতিরুচ্যতেঽত্র স্থাপ্যোঽন্ত্য বর্গো দ্বিগুণান্ত্য নিঘ্নাঃ। স্বস্বোপরিষ্ঠাচ্চ তথা পরেঽঙ্কাস্ত্যক্ত্বান্ত্য মুৎসার্য্য পুনশ্চ রাশি॥ খণ্ডদ্বয় স্যাভিহতির্দ্বিনিঘ্নৌ তৎ খণ্ডবর্গৈক্যযুতা কৃতির্বা। ইষ্টোনযুগ্রাশি বধঃ কৃতিঃ স্যাদিষ্টস্য বর্গেণ সমন্বিতো বা। ১৮—১৯।

বর্গের সূত্র দুইটি অনুচ্ছেদ। সমান দুইটি সংখ্যার গুণফলকে বর্গ বলে। শেষ রাশি উপরে রাখিতে হইবে অবশিষ্ট রাশি দ্বিগুণ করিতে হইবে এবং শেষ রাশি দ্বারা গুণ করিয়া উপরে রাখিতে হইবে পরে পুনরায় শেষ রাশি ভিন্ন অন্য রাশি রাখিতে হইবে। অথবা দুইটি অংশের দ্বিগুণ করিয়া অংশগুলির বর্গের সহিত যোগ করিলে বর্গ হইবে। রাশির সহিত ধরিয়া লওয়া রাশি যোগ করিতে হইবে এবং রাশির সহিত ধরিয়া লওয়া রাশি বিয়োগ করিতে হইবে, এইবার সেই দুইটির গুণ করিতে হইবে এবং তাহার সহিত ধরিয়া লওয়া রাশির বর্গ যোগ করিতে হইবে তাহা হইলেই রাশির বর্গ পাওয়া যাইবে। ১৮।১৯।

অত্রোদ্দেশকঃ। সখে নবানাঞ্চ চতুর্দ্দশানাং ব্রূহি ত্রিহীনস্য শতত্রয়স্য।
পঞ্চোত্তরস্যাপ্যযুতস্য বর্গং জানাসি চেদ্ বর্গবিধান মার্গম্।। ২০

ইহার উদাহরণ। হে প্রিয়ে! নয়, চতুর্দ্দশ, তিন শতকের তিন কম, অযুতের পাঁচ বেশী ইহাদের বর্গ বাহির করিবার রীতি যদি তোমার জানা থাকে বল।

ন্যাসঃ। ৯।১৪।২৯৭।১০০০৫।

এষাং যথোক্তকরণেন জাতাবর্গাঃ। ৮১।১৯৬।৮৮২০৯।১০০১০০০২৫।

নিয়ম। উপরিউক্ত নিয়মানুসারে এইরূপ উহাদের বর্গ জন্মিল ৮১।১৯৬।৮৮২০৯।১০০১০০০২৫।

অথবা নবানাং খণ্ডে। ৪।৫। অনয়োরাহতি ২০।

দ্বির্নিঘ্নী—৪০। তৎ খণ্ডবর্গৈক্যেন ৪১। যুতা জাতা সৈব কৃতিঃ ৮১।

অথবা ৯কে ৪ এবং ৫ এই দুই খণ্ডে বিভক্ত করিয়া তাহাদের গুণকরা হইল ২০। ইহাদের গুণফলকে দ্বিগুণ করা হইল ৪০। তাহাদের দুইটির অর্থাৎ ৪^{২} এবং ৫^{২} বর্গের যোগ করা হইল এবং এই দুই যোগ করিলে ৪০ + ৪১ = ৮১

অথবা চতুর্দ্দশানাঃ খণ্ডে ৮।৬ অনয়োরাহতি ৪৮। দ্বির্নিঘ্নী ৯৬। তৎ খণ্ডবর্গো ৩৬।৬৪ অনয়োরৈক্যেন ১০০। যুতা জাতা সৈব কৃতিঃ ১৯৬।

অথবা ১৪কে দুইটি খণ্ডে ৮ এবং ৬ বিভক্ত করা হইল, পরে উহাদের গুণ করা হইল—৪৮ হইল। ইহার দ্বিগুণ করা হইল ৯৬। দুইটি খণ্ডের বর্গ করা হইল ৩৬ এবং ৬৪। ইহাদের যোগ করা হইল ১০০ হইল। ইহার সহিত ৯৬ যোগ করা হইল, ১৯৬ হইল। অথবা খণ্ডে ৪।১০। তথাপি সৈব কৃতিঃ ১৯৬।

১৪কে ৪ এবং ১০ এই দুইটি খণ্ডে বিভক্ত করা হইল। ইহাদের গুণ করা হইল ৪০। ইহার দ্বিগুণ করা হইল ৮০। দুইটি খণ্ডের বর্গ করা হইল ১৬ এবং ১০০ যোগ করিয়া ১১৬ হইল। ইহার সহিত ৮০ যোগ করা হইল—১৯৬ হইল।

অথবা রাশিঃ ২৯৭। অয়ং ত্রিভিরূনিতঃ। পৃথগ্ যুতশ্চ। ২৯৪ ৩০০ অনয়োর্ঘাতঃ ৮৮২০০। ত্রিবর্গ ৯। যুতো জাতো বর্গঃ স এব ৮৮২০৯। এবং সর্ব্বত্রাপি।

অথবা ২৯৭ এই রাশির বর্গ। ইহা হইতে ৩ বাদ দিতে হইবে এবং ইহাতে তিন যোগ করিতে হইবে। ইহাতে ২৯৪ ও ৩০০ এই দুইটি রাশি পাওয়া যাইল। ইহাদের গুণ করিতে হইবে।

৮৮২০০ ইহার সহিত তিনের বর্গ যোগ করিতে হইবে অতএব ৮৮২০০ যোগ ৯=৮৮২০৯ হইবে।

এইরূপ সকল ক্ষেত্রে।

বর্গমূলে করণ সূত্রং বৃত্তম্। ত্যক্ত্বান্ত্যাদ্ বিষমাত্ কৃতিং দ্বিগুণয়েন্মূলং সমে তদ্ধৃতে ত্যক্ত্বা লব্ধকৃতং তদাদ্যবিষমাল্লব্ধং দ্বিনিঘ্নং ন্যসেৎ। পঙ্‌ক্ত্যাং পঙ্‌ক্তি হৃতে সমেঽন্য বিষমাত্যক্ত্বাপ্তবর্গং ফলং পঙ্‌ক্ত্যাং তদ্ দ্বিগুণং ন্যসেদিতি মুহুঃ পঙ্‌ক্তে র্দলং স্যাৎ পদম্। ২১

বর্গমূলের সূত্র একটি অনুচ্ছেদ। বিষম রাশির শেষ হইতে ত্যাগ করিয়া মূল রাশিকে দ্বিগুণ করিতে হইবে। সম রাশিকে তাহার দ্বারা ভাগ করিয়া যে ভাগফল হইল, সেই ভাগফলের বর্গ সেই সমরাশি হইতে বিয়োগ করিয়া দ্বিগুণ করিয়া রাখিতে হইবে। এইরূপ এক পঙ্‌ক্তিতে ভাগফলের দ্বিগুণ রাখিতে হইবে।

এইভাবে পুনরায় ভাগফলের দ্বিগুণ করিতে হইবে। পুনরায় সমরাশির দ্বারা ভাগ করিতে হইবে এবং ভাগফলের বর্গ দ্বারা ভাগ করিতে হইবে এইভাবে পুনঃ পুনঃ করিতে হইবে যতক্ষণ না রাশি শেষ হয়।

অত্রোদ্দেশকঃ। মূলং চতুর্ণাঞ্চ তথা নবানাং পূর্ব্বং কৃতানাঞ্চ সখ কৃতীনাম্। পৃথক্ পৃথগ্ বর্গপদানি বিদ্ধি বুদ্ধের্বিবৃদ্ধির্যদি তেঽত্র জাতা। ২২

ইহার উদাহরণ। মূল ৪,৯ এবং পূর্ব্ব পূর্ব্ব রাশির পৃথক্ পৃথক্ বর্গ পদ জানিও, যদি তোমার বুদ্ধি বিশেষ বৃদ্ধি পাইয়া থাকে।

ন্যাসঃ ৪।৯।৮১।১৯৬।৮৮২০৯।১০০১০০০২৫ লব্ধানি ক্রমেণ মূলানি ২।৩।৯।১৪।২৯৭।১০০০৫।

উদাহরণের প্রকার ৪।৯।৮১।১৯৬।৮৮২০৯।১০০১০০০২৫ এইভাবে ক্রমে ক্রমে বর্গমূল পাওয়া যাইল—

```
    ৪ (২        ৯ (৩        ৮১ (৯        ১৯৬ (১৪        ৮৮২০৯ (২৯৭
    ৪           ৯           ৮১           ১               ৪
    ―           ―           ――         ―――            ――――
                                    ২৪ | ৯৬         ৪৯ | ৪৮২
    ১০০১০০০২৫ (১০০০৫                     ৯৬              ৪৪১
    ১                                    ――          ৫৮৭ | ৪১০৯
    ――                                                    ৪১০৯
     ০০                                                   ――――
২০০০৫ | ১০০০২৫
        ১০০০২৫
        ――――――
```

ইতি বর্গমূলম্

ঘনে করণসূত্রং বৃত্তত্রয়ম্। সমত্রিঘাতশ্চ ঘনঃ প্রদিষ্টঃ স্থাপ্যো ঘনোঽন্ত্যস্য ততোঽন্ত্যবর্গঃ। আদিত্রিনিঘ্নস্ততঃ আদিবর্গস্ত্যন্ত্যা হতোঽথাদিঘনশ্চ সর্ব্বে॥ স্থানান্তরত্বেন যুতা ঘনঃ স্যাৎ প্রকল্প্য তৎ খণ্ডযুগং ততোঽন্ত্যম্। এবং মুহুর্বর্গঘন প্রসিদ্ধা বাদ্যাঙ্কতো বা বিধিরেবঃ কার্য্যঃ। খণ্ডাভ্যাং বাহতোরাশিস্ত্রিঘ্নঃ খণ্ডঘনৈক্যযুক্। বর্গমূল ঘনস্বঘ্ন। বর্গরাশের্ঘনো ভবেৎ। ২৩-২৫

ঘনফল নির্ণয়ের তিনটি অনুচ্ছেদ। সমরাশিকে সমরাশি দ্বারা তিন বার গুণ করিলে ঘন পাওয়া যায়। শেষ রাশির ঘন বাহির করিয়া রাখিতে হইবে। তাহার পর, শেষ রাশির বর্গ প্রথম রাশির তিন গুণের দ্বারা গুণ করিতে হইবে। তার পর প্রথম রাশির বর্গ তিন গুণ করিয়া শেষে রাখিতে হইবে এবং শেষে প্রথম রাশির ঘন লইতে হইবে। এইগুলি সমস্ত যোগ করিতে হইবে; সেই সংখ্যাটিকে দুইটি ভাগ করিয়া একটিকে শেষে রাখিতে হইবে। এইভাবে পুনঃ পুনঃ করিতে হইবে। অথবা এই নিয়ম রাশির প্রথম স্থানটিকে লইতে হইবে ঘন বা বর্গ বাহির করিবার জন্য। অথবা সেই সংখ্যার তিন গুণকে ইহার দুইটি খণ্ডের দ্বারা গুণ করিতে হইবে। ঐ খণ্ডগুলির ঘন বাহির করিয়া যোগ করিতে হইবে। অথবা নির্দ্দিষ্ট সংখ্যার বর্গমূলকে ঘন করিতে হইবে পরে উহাই বর্গমূলের ঘনবর্গ হইবে।

অত্রোদ্দেশকঃ। নবঘনং ত্রিঘনস্য ঘনং তথা কথয় পঞ্চ ঘনস্য ঘনঞ্চমে। ঘনপদঞ্চ ততোঽপি ঘনাৎ সখেযথদি ঘনেঽস্তি ঘনা ভবতো মতিঃ ২৭

ইহার উদাহরণ। হে সখে যদি তোমার ঘন সম্বন্ধে সেরূপ বুদ্ধি থাকে তো বল ৯ এর ঘন কত? তিনের ঘনের ঘন কত? পাঁচের ঘনের ঘন কত? এবং এই ঘনগুলির ঘন কত?

ন্যাসঃ ৯।২৭।১২৫

জাতাঃ ক্রমেণ ঘনাঃ ৭২৯।১৯৬৮৩।১৯৫৩১২৫

অথবা রাশিঃ। ৯। অস্য খণ্ডে ৪।৫। আভ্যাং রাশির্হতঃ ১৮০। ত্রিনিঘ্নশ্চ ৫৪০। খণ্ড ঘনৈক্যেন ১৮৯। যুতো জাতো ঘনঃ ৭২৯।

অথবা ৯ এই রাশির ঘন বাহির করিতে হইলে ইহাকে ৪ ও ৫ এই দুই খণ্ডে ভাগ করিতে হইবে। এই দুইটি রাশি দ্বারা ৯ কে গুণ করিতে হইবে $৯ \times ৪ \times ৫ = ১৮০$। ইহার তিন গুণ করিতে হইবে

৩ × ১৮০ = ৫৪০। খণ্ড ঘনের ঐক্য = ১৮০ + ৯ = ১৮৯। দুইটি যোগ করিলে ঘন হইবে ৫৪০ + ১৮৯ = ৭২৯

অথবা রাশিঃ ২৭। অস্তখণ্ডে ২০।৭। আভ্যাং ঘনস্ত্রিঘ্নশ্চ। ২২৩৪০। খণ্ডঘনৈক্যেন। ৮৩৪২। যুতো জাতো ঘনঃ ১৯৬৮৩

অথবা ২৭ এই রাশির ঘন বাহির করিতে হইলে ২০ ও ৭ এই দুইটি খণ্ডে বিভক্ত করা হইল। ২০,৭ এবং ২৭ এই তিনটি রাশি গুন করিতে হইবে = ৩৭৮০ ইহার সহিত ৩ গুণ করিতে হইবে = ১১৩৪০ খণ্ডঘনের ঐক্য ৮৩৪৩। এই দুইটি রাশি যোগ করিতে হইবে।

১১৩৪০ + ৮৩৪৩ = ১৯৬৮৩ | ২০³ + ৭³ = ৮০০০ + ৩৪৩ = ৮৩৪৩ |

অথবা রাশিঃ ৪। অস্ত মূলম্ ২। ঘনঃ।৮। অয়ং স্বয়োজাতশ্চতুর্ণাং ঘনঃ। ৬৪

অথবা ৪ এই রাশির বর্গমূল ২। ইহার ঘন ৮। এই চারকে ৩ বার গুণ করিলে ৪ × ৪ × ৪ = ৬৪।

অথবা রাশিঃ ৯। অস্য মূলং '৩' ঘনঃ ২৭। অস্ত বর্গোনবানাং ঘনঃ। ৭২৯। য এব বর্গরাশিঘনঃ স এব বর্গমূলঘনবর্গঃ।

অথবা ৯ এই রাশির বর্গমূল ৩। ইহার ঘন ২৭। ৯ অর্থাৎ ৩ এর বর্গ তাহার ঘন ৭২৯। সংক্ষেপে ঘনের বর্গ, বর্গের ঘনের সহিত সমান।

ইতি ঘনঃ।

অথ ঘনমূলে করণ সূত্রং বৃত্তদ্বয়ম্। আদ্যং ঘনস্থান যথাঘনে দ্বে পুনস্তথাস্ত্যাদ্ঘনতোবিশোধ্যম্। ঘনং পৃথকস্থং পদমস্ত কৃত্বা ত্রিঘ্ন্যা তদাদ্যং বিভজেৎ ফলস্তু॥ পঙক্ত্যাংন্যসেৎ তৎকৃতিমস্ত্যনিঘ্নীং ত্রিঘ্নীং ত্যজেৎ তৎ প্রথমাৎ ফলস্য। তদাস্ত্যাদ্ঘনমূলমেবং পঙ্‌ক্তির্ভবেদেব মতঃ পুনশ্চ॥ ২৭ – ২৮।

অনন্তর ঘন মূলের সূত্র দুইটি অনুচ্ছেদ।

প্রথম রাশিটি ঘনের স্থান। পরের দুইটি স্থান ঘন ভিন্ন; অবশিষ্ট সেই প্রকার। শেষ ঘন স্থান হইতে ঘন গ্রহণ করিতে হইবে এবং বর্গকে পৃথক স্থানে বসাইতে হইবে। সেই বর্গমূলের তিনগুণ করিয়া পরের রাশি দ্বারা ভাগ করিতে হইবে। ভাগফল পরের লাইনে (পঙক্তিতে) স্থাপন করিতে হইবে। পরের রাশি হইতে যাহাকে তিনগুণ করা হইয়াছিল তাহা বিয়োগ করিতে হইবে এবং ঘনকেও পরেরটি হইতে বাদ দিতে হইবে। এই পঙক্তিটিই ঘনমূল। প্রয়োজনানুসারে এইরূপ পুনঃ পুনঃ করা যাইতে পারে।

অত্র পূর্ব্বোদ্দেশকে উক্ত ঘনানাং মূলার্থ ন্যাসঃ।

৭২৯। ১৯৬৮৩। ১৯৫৩১২৫।

ক্রমেন লব্ধানি মূলানি— ৯। ২৭ ১২৫

পূর্ব্বোদাহরণে ঐগুলির ঘনমূল এইরূপ—

৭২৯। ১৯৬৮৩। ১৯৫৩১২৫।

যথাক্রমে ৯। ২৭ এবং ১২৫ ইহারাই ঘনমূল। এইরূপ ঘনমূল সম্পূর্ণ।

অথ ভিন্ন পরিকর্ম্মাষ্টকম্। তত্রাদাবংশসবর্ণনম্। তত্রাপি ভাগ জাতৌ করণসূত্রং বৃত্তম্। অন্যোন্যহারাভিহতৌ হরাংশৌ রাশ্যোঃ সমচ্ছেদবিধানমেবম্। মিথো হরাভ্যামপবর্ত্তিতাভ্যাং যদ্বা হরাংশৌ সুধিয়াত্র গুণ্যৌ। ২৯।

অনন্তর ভিন্ন পরিচ্ছেদ। প্রথমে ভগ্নাংশের বর্ণনা। ভগ্নাংশের লঘুকরণে একটি অনুচ্ছেদ। দুইটি রাশির হর ও লবকে বিপরীতক্রমে অপর রাশির হর দ্বারা গুণ করিয়া সমান হর বিশিষ্ট রাশিতে পরিণত করা যায়, অথবা হর ও লব উভয়কে বুদ্ধিমানগণ হরদ্বয় হইতে সাধারণ উৎপাদক বাদ দিয়া বিপরীত ক্রমে গুণ করিতে পারেন।

অত্রোদ্দেশকঃ। রূপত্রয়ং পঞ্চলবস্ত্রিভাগো যোগার্থমেতান্বদ তুল্যহরান্। ত্রিষষ্টিভাগশ্চ চতুর্দ্দশাংশঃ সমচ্ছিদৌ মিত্র বিয়োজনার্থম্॥ ৩০

ন্যাস $\frac{৩}{১}+\frac{১}{৫}+\frac{১}{৩}$

জাতা সমচ্ছেদাঃ $\frac{৪৫}{১৫}+\frac{৩}{১৫}+\frac{৫}{১৫}$

যোগে জাতম্ $\frac{৫৩}{১৫}$

অথ দ্বিতীয়োদাহরণার্থং ন্যাসঃ $\frac{১}{১৪}-\frac{১}{৬৩}$

এতৌ সপ্তাপবর্ত্তিতাভ্যাং হারাভ্যাং ২, ৯

মিথ সংগুণিতৌ সমচ্ছেদৌ $\frac{৯}{১২৬}-\frac{২}{১২৬}$

বিয়োজিতে জাতম্ $\frac{৭}{১২৬}$

সপ্তানবর্ত্তিতে চ জাতম্ $\frac{১}{১৮}$

সাধারণ হরে পরিণত করিয়া এই তিনটি রাশি যোগ করিলে কি হইবে বল :— $\frac{৩}{১}+\frac{১}{৫}+\frac{১}{৩}$ এবং $\frac{১}{১৪}$ হইতে $\frac{১}{৬৩}$ বিয়োগ করিলে কি হইবে বল।

যোগের সময় সাধারণ হরে পরিণত করা হইল (১৫) অতএব $\frac{৪৫}{১৫}+\frac{৩}{১৫}+\frac{৫}{১৫}=\frac{৫৩}{১৫}$

বিয়োগের সময় হরের সাধারণ উৎপাদক বাহির করা হইল—৭। ৬৩ = ৭ × ৯ ; ১৪ = ৭ × ২

∴ সাধারণ হর ৭ × ৯ × ২ = ১২৬

$\frac{৯}{১২৬}-\frac{২}{১২৬}$ অতএব বিয়োগ ফল $\frac{৭}{১২৬}$

অতএব সংক্ষেপ করণে $\frac{১}{১৮}$ হইল।

ইতি ভাগজাতিঃ।

এইরূপ ভাগের বিবরণ।

অথ প্রভাগজাতৌ করণ সূত্রং বৃত্তার্দ্ধম্। লবালবঘ্নাশ্চ হরাহরঘ্না ভাগপ্রভাগেষু সবর্ণনংস্যাৎ। ৩১

ভগ্নাংশের উপভাগের লঘুকরণ এর নিয়ম অর্দ্ধ অনুচ্ছেদ। লবের সহিত লবের এবং হরের সহিত হরের গুণ করিতে হয় ভগ্নাংশের উপবিভাগে।

অত্রোদ্দেশকঃ। দ্রম্মার্দ্ধত্রিলবদ্বয়স্য সুমতে পাদত্রয়ংযদ্ভবেৎ তৎ পঞ্চাংশকো ষোড়শাংশচরণঃ সম্প্রার্থিতে-নার্থিনে। দত্তোযেন বরাটকাঃ কতি কদর্য্যোনাপিতা স্তেন মে ব্রূহিত্বং যদি বেৎসি গণিতে জাতিং প্রভাগাভিধাম্। ৩২

২

উদাহরণ কোন ভিক্ষুক কোন এক কৃপণ ব্যক্তির নিকট ভিক্ষা চাইতে—সে এক দ্রম্মের অর্দ্ধকের দুই তৃতীয়াংশের তিনের চতুর্থাংশের একের পঞ্চমাংশের একের ষোল অংশের সিকি ভাগ দান করিল—গণিতের উপভাগে যদি তোমার দক্ষতা থাকে তাহা হইলে বল কতগুলি কড়ি কৃপণটি দান করিয়াছিল।

ন্যাসঃ। $\frac{১}{২}$ $\frac{২}{৩}$ $\frac{৩}{৪}$ $\frac{১}{৫}$ $\frac{১}{১৬}$ $\frac{১}{৪}$ সবর্ণিতে জাতম্ $\frac{৬}{৭৬৮০}$ ষড়ভিরপবর্ত্তিতে জাতম্—$\frac{৬}{৭৬৮০}=\frac{১}{১২৮০}$ একো দত্তো বরাটকঃ।

বর্ণনা—দ্রম্ম এর (অর্দ্ধ) $\frac{১}{২}$ র (ত্রিলব দ্বয়স্ত) $\frac{২}{৩}$ র (পাদত্রয়ং) $\frac{৩}{৪}$ এর (পঞ্চমাংশক) $\frac{১}{৫}$ এর (ষোড়শাংশ) $\frac{১}{১৬}$ এর (চরণা) $\frac{১}{৪}=\frac{৬}{৭৬৮০}$ সংক্ষেপ করণে $\frac{১}{১২৮০}$। অর্থাত একটি কড়ি দান করিল। এক দ্রম্ম=১২৮০ কড়ি।

ইতি প্রভাগজাতিঃ।

এইরূপ উপভাগের বিবরণ।

অথ ভাগানুবন্ধ ভাগাপবাহয়োঃ করণসূত্রং সার্দ্ধবৃত্তম্। ছেদঘ্নরূপেষু লবাধনর্ণমেকস্য ভাগা অধিকোনকাশ্চেৎ। স্বাংশাধিকোনঃ খলু যত্র তত্র ভাগানুবন্ধে চলবাপবাহে। তলস্থহারেণ হরঙ্নিহ্ন্যাৎ স্বাংশাধিকোনেন তু তেন ভাগান্। ৩৩

যে কোন রাশির ভগ্নাংশের দ্বারা বৃদ্ধি বা হ্রাস দেড় অর্থাৎ এক আর অর্দ্ধেক অনুচ্ছেদ। যে কোন পূর্ণসংখ্যা হরের দ্বারা গুণ করিলে লবটি যোগ চিহ্ন বা বিয়োগ চিহ্ন যুক্ত হয় যদি অংশগুলি তাহার সহিত যোগ বা বিয়োগ করা হয়। কিন্তু ইহার কোন অংশদ্বারা যদি রাশিটি বর্দ্ধিত বা হ্রাসপ্রাপ্ত হয় তবে ভগ্নাংশের যোগে বা বিয়োগে নিম্নস্থিত হরকে হরের দ্বারা গুণ করিতে হয় এবং লবকে বর্দ্ধিত বা হ্রাস প্রাপ্ত হরের দ্বারা গুণ করিতে হয়।

অত্রোদ্দেশকঃ। সাঙ্ঘ্রিদ্বয়ং ত্রয়ং ব্যঙ্ঘ্রি কীদৃগ্ ব্রূহি সবর্ণিতম্। জানাস্যংশানুবন্ধঞ্চেত্তথা ভাগাপবাহনম্। ৩৪

ইহার উদাহরণ—ভগ্নাংশের বৃদ্ধি বা হ্রাসের সহিত যদি পরিচয় থাকে তাহা হইলে বল, দুই এবং এক চতুর্থাংশ যুক্ত হইলে, তিন হইতে এক চতুর্থাংশ হ্রাস করা হইলে কত হয়।

ন্যাসঃ ২ ৩

$\frac{১}{৪}$ $\frac{১}{৪}$

সবর্ণিতে জাতম্—$\frac{৯}{৪}$ $\frac{১১}{৪}$

বর্ণনা—২ ৩

$\frac{১}{৪}$ $\frac{১}{৪}$ (এখানে বিন্দুটি বিয়োগের চিহ্ন বলিয়া বুঝিতে হইবে অতএব) ২ এবং $\frac{১}{৪}=\frac{৯}{৪}$ এবং ৩ হইতে $\frac{১}{৪}$ বিয়োগ করিলে $\frac{১১}{৪}$ হইবে।

অত্রোদ্দেশকঃ। অঙ্ঘ্রিঃ স্বত্র্যংশযুক্তঃ স নিজদলযুতঃ কীদৃশঃ কীদৃশৌ দ্বৌ ত্র্যংশৌ স্বাষ্টাংশহীনৌ তদনু চ রহিতৌ স্বত্রিভিঃ সপ্তভাগৈঃ। অর্দ্ধস্বাষ্টাংশহীনং নবভিরথযুতং সপ্তমাংশৈঃ স্বকীয়ৈঃ কীদৃক্ স্যাদ্ ব্রূহি বেৎসি ত্বমিহ যদি সখেঽংশানুবন্ধাপবাহৌ ॥ ৩৫

উদাহরণ—এক চতুর্থাংশ তাহার একের তিনের সহিত নিজ অর্দ্ধাংশের সহিত যোগ করিলে এবং দু'এর তিনের অংশ হইতে একের আট অংশ বিযুক্ত হইলে এবং তাহা হইতে তিনের সাত অংশ বিযুক্ত হইলে কত হয়; বল দেখি ঠিক্ ঐ উপায়ে অর্দ্ধ হইতে একের আট অংশ বিযুক্ত হইলে এবং নয়ের সাত অংশ যুক্ত হইলে কত হয় যদি হে কল্যাণি! ভগ্নাংশের যোগ বা বিয়োগে নিপুণা হও তো বল!

ন্যাসঃ $\frac{১}{৪}$ $\frac{২}{৩}$ $\frac{১}{২}$

$\frac{১}{৩}$ $\frac{১}{৮}$ $\frac{১}{৮}$

$\frac{১}{২}$ $\frac{৩}{৭}$ $\frac{৯}{৭}$

ক্রমেণ সবর্ণিতে জাতম্—$\frac{১}{২}$, $\frac{১}{৩}$, $\frac{১}{১}$

বর্ণনা: $\frac{১}{৪}$ $\frac{২}{৩}$ $\frac{১}{২}$

$\frac{১}{৩}$ $\frac{১}{৮}$ $\frac{১}{৮}$

$\frac{১}{২}$ $\frac{৩}{৭}$ $\frac{৯}{৭}$

$$\frac{১\times(৩+১)\times(২+১)}{৪\times৩\times২}=\frac{১২}{২৪}=\frac{১}{২} \quad \Big| \quad \frac{৫৬}{১৬৮}=\frac{১}{৩} \quad \Big| \quad \frac{১১২}{১১২}=\frac{১}{১}$$

ইতি জাতিচতুষ্টয়ম্।

অথ ভিন্ন সঙ্কলিত ব্যবকলিতয়োঃ করণ সূত্রং বৃত্তার্দ্ধম্। যোগোঽন্তরং তুল্যহরাংশকানাং কল্প্যোহরো রূপমহাররাশেঃ॥ ৩৬

ভগ্নাংশের যোগ ও বিয়োগের অর্দ্ধ অনুচ্ছেদ। ভগ্নাংশে যোগ অথবা বিয়োগে সমান হর গ্রহণ করিতে হয়। যাহার ভাগফল নাই সেইরূপ রাশির এক বলিয়া হর কল্পনা করিতে হয়।

অত্রোদ্দেশকঃ। পঞ্চাংশপাদ ত্রিলবার্দ্ধষষ্ঠানেকীকৃতান্ ব্রূহি সখে মমৈতান্ এভিশ্চ ভাগৈরথ বর্জ্জিতানাং কিং স্যাৎ ত্রয়াণাং কথয়াশু শেষম্॥ ৩৭

হে কল্যাণি শীঘ্র বল, একের পাঁচ, একের চার, একের তিন, একের দুই, একের ছয় যোগ করিলে কি হয়? তিন হইতে ইহা বিয়োগ করিলে কি হয় বল।

ন্যাসঃ—$\frac{১}{৫}$, $\frac{১}{৪}$, $\frac{১}{৩}$, $\frac{১}{২}$, $\frac{১}{৬}$

ঐক্যে জাতম্—$১\frac{৯}{২০}$

অথৈতৈর্বিবর্জ্জিতানাং ত্রয়াণাং শেষম্ $১\frac{১১}{২০}$

বর্ণনা—$\frac{১}{৫}+\frac{১}{৪}+\frac{১}{৩}+\frac{১}{২}+\frac{১}{৬}$

$$=\frac{১২+১৫+২০+৩০+১০}{৬০}=\frac{\cancel{৮৭}^{২৯}}{\cancel{৬০}_{২০}}=\frac{২৯}{২০}$$

তিন হইতে ইহা বাদ দিলে শেষ থাকিবে $১\frac{১১}{২০}$,

ইতি ভিন্ন সঙ্কলিত ব্যবকলিতে।

এইরূপ ভগ্নাংশের যোগ ও বিয়োগের নিয়ম।

অথ ভিন্ন গুণনে করণসূত্রং বৃত্তার্দ্ধম্। অংশাহতিশ্ছেদ বধেন ভক্তা লব্ধং বিভিন্নে গুণনে ফলং স্যাৎ। ৩৮

ভগ্নাংশের গুণের সূত্র অর্দ্ধ অনুচ্ছেদ। লবগুলির গুণফলকে হর গুলির গুণ ফলের দ্বারা ভাগ করিলে ভগ্নাংশের গুণফল পাওয়া যায়।

অত্রোদ্দেশকঃ। সত্র্যংশরূপ দ্বিতয়েন নিঘ্নং স সপ্তমাংশ দ্বিতয়ং ভবেৎ কিম্। অর্দ্ধ ত্রিভাগেন হতঞ্চ বিদ্ধি দক্ষোঽসি ভিন্নে গুণনা বিধৌ চেৎ॥ ৩৯

উদাহরণ—দুই ও একের সাতকে দুই ও একের তিন দিয়া গুণ করিলে কি হইবে এবং একের দুইকে একের তিন দিয়া গুণ করিলে কি হইবে যদি গুণের বিধানে নিপুণা হও তো বল?

ন্যাসঃ— $\overset{২}{\frac{১}{৭}}$ $\overset{২}{\frac{১}{৩}}$

সবর্ণিতে জাতম্— $\frac{১৫}{৭}$ $\frac{৭}{৩}$

গুণিতে জাতম্— $\frac{৫}{১}$

ন্যাসঃ — $\frac{১}{২}$ $\frac{১}{৩}$

গুণিতে জাতম্— $\frac{১}{৬}$

বর্ণনা— $২+\frac{১}{৭}$ $২+\frac{১}{৩}$

উভয়ে যোগ করিলে $\frac{১৫}{৭}$ $\frac{৭}{৩}$

উভয়ের গুণফল $=\frac{\cancel{৭}}{\cancel{৩}}\times\frac{\overset{৫}{\cancel{১৫}}}{\cancel{৭}}=\frac{৫}{১}$

বর্ণনা $\frac{১}{২}$ এবং $\frac{১}{৩}$

গুণ করিলে $\frac{১}{২}\times\frac{১}{৩}=\frac{১}{৬}$

ইতি ভিন্ন গুণনম্।

এইরূপ ভিন্ন রাশির গুণফল।

অথ ভিন্ন ভাগহারে করণসূত্রং বৃত্তার্দ্ধম্।

ছেদং লবঞ্চ পরিবর্ত্ত্যহরস্য শেষঃ কার্য্যোঽথ ভাগহরণে গুণনাবিধিশ্চ। ৪০

ভগ্নাংশের ভাগের সূত্র অর্দ্ধ অনুচ্ছেদ। লবের সহিত হরের পরিবর্ত্তন করিয়া গুণনের নিয়মানুসারে গুণ করিতে হইবে।

অত্রোদ্দেশকঃ। সত্র্যাংশরূপ দ্বিতয়েন পঞ্চত্র্যংশেন ষষ্ঠং বদ মে বিভজ্য। দর্ভীয়গ্রভাগ সুতীক্ষ্ণ বুদ্ধি-শ্চেদস্তি তে ভিন্নহতৌ সমর্থা॥ ৪১

পাচকে দুই এবং একের তিন দ্বারা ভাগ করিলে এবং একের ছয়কে একের তিন দ্বারা ভাগ করিলে হে কুশাগ্রসুতীক্ষ্ণ বুদ্ধি সম্পন্নে যদি সমর্থ হও তো বল।

ন্যাসঃ— $\overset{২}{\frac{১}{৩}}$ $\frac{৫}{১}$ $\frac{১}{৬}$ $\frac{১}{৩}$

যথোক্ত করণেন জাতম্ $\frac{১৫}{৭}$ $\frac{১}{২}$

ইতি ভিন্ন ভাগহারঃ

বর্ণনা $\overset{২}{\frac{১}{৩}}$ $\frac{৫}{১}$ $\frac{১}{৬}$ $\frac{১}{৩}$

উক্ত প্রকারে স্থির হইল $\frac{১৫}{৭}$ $\frac{১}{২}$

এইভাবে ভিন্ন ভাগের প্রকরণ।

অথ ভিন্ন বর্গাদৌ সূত্রং বৃত্তার্দ্ধম্। বর্গে কৃতৌ ধনবিধৌ তুঘনৌ বিধেয়ৌ হারাংশয়োরথ পদে চ পদ প্রসিদ্ধৈ। ৪২

অনন্তর ভিন্ন বর্গেতে সূত্র অর্দ্ধ অনুচ্ছেদ। বর্গ নির্ণয় করিতে হইলে অথবা ঘন নির্ণয় করিতে হইলে লব এবং হর উভয়ের বর্গ বাহির করিতে হইবে এবং উভয়ের বর্গমূল বাহির করিতে হইবে। এবং বর্গমূল বাহির করিতে হইলে লব ও হরের উভয়ের বর্গমূল বাহির করিতে হইবে।

অত্রোদ্দেশকঃ। সার্দ্ধত্রয়াণাং কথয়াশু বর্গং বর্গাত্ততো বর্গ পদঞ্চ মিত্র। ঘনঞ্চ মূলঞ্চ ঘনাত্ততোঽপি জানাসি চেদ্ বর্গঘনৌ বিভিন্নৌ। ৪৩

তিন এবং অর্দ্ধেকের সমষ্টির বর্গ কত শীঘ্র বল। এবং বর্গের বর্গমূল কত? তাহার ঘন এবং তাহার ঘন মূল যদি নিপুণা হওতো শীঘ্র বল।

ন্যাসঃ— $\overset{৩}{\frac{১}{২}}$

ছেদঘ্নরূপে কৃতে জাতম্—$\frac{৭}{২}$

অস্য বর্গঃ $\frac{৪৯}{৪}$ মূল—$\frac{৭}{২}$

ঘনঃ $\frac{৩৪৩}{৮}$ অস্য মূলং $\frac{৭}{২}$

ইতি ভিন্ন পরিকর্ম্মাষ্টকম্।

বর্ণনা—$\overset{৩}{\frac{১}{২}}$

ভগ্নাংশ প্রকৃতরূপ করিয়া হইল $\frac{৭}{২}$

এই ভগ্নাংশের বর্গ—$\frac{৪৯}{৪}$ ইহার বর্গমূল $\frac{৭}{২}$

এই ভগ্নাংশের ঘন—$\frac{৩৪৩}{৮}$ ইহার ঘনমূল $\frac{৭}{২}$

অথ শূন্যের পরিকর্ম্মসু করণসূত্রং মার্য্যাদ্বয়ম্। যোগে স্বংক্ষেপ সমং বর্গাদৌ স্বং স্বভাজিতো রাশিঃ। স্বহরঃ স্যাৎ স্বগুণঃস্বং স্বগুণ শ্চিন্ত্যশ্চ শেষবিধৌ। শূন্যে গুণকে জাতে স্বং হারশ্চেদ্ পুনস্তদা রাশিঃ। অবিকৃত এব জ্ঞেয়স্তথৈব স্বেনোনিতঞ্চ যুতঃ॥ ৪৪—৪৫

অনন্তর শূন্যের সহিত অন্যরাশির যোগ গুণাদির নিয়ম দুইটি অনুচ্ছেদে বর্ণিত। যোগে শূন্যের সহিত যে কোন রাশির যোগফল সেই রাশিই হইবে। শূন্যের সহিত গুণে শূন্যই হইবে। শূন্য দ্বারা ভাগ করিলে অশেষ হইবে। গুণের বেলায় শূন্য হইলেও শূন্যের গুণন রূপে থাকিয়া যাইবে। শূন্য ভাজক রূপে ধরিলে অবিকৃত রাশি যাহা উহ্য আছে তাহা অপরিবর্ত্তিত থাকিবে।

অত্রোদ্দেশকঃ। খং পঞ্চযুগ্ ভবতি কিংবদ খস্য বর্গং মূলং ঘনং ঘনপদং খগুণঞ্চপঞ্চ। খেনোদ্ধৃতা দশ চ কঃ খগুণো নিজার্দ্ধযুক্তো স্ত্রিভিশ্চগুণিত খ ইতি স্ত্রিষষ্টীঃ॥ ৪৬

ইহার উদাহরণ—আমাকে বল পাঁচের সহিত শূণ্য যোগ করিলে এবং শূণ্যের বর্গ ইহার বর্গমূল, ঘন এবং ঘনমূল; পাঁচকে শূণ্য দ্বারা গুণ করিলে এবং দশ হইতে শূণ্য বাদ দেওয়া হইলে কত হয়? এবং কোন সংখ্যাকে শূণ্য দ্বারা গুণ করিয়া তাহার সহিত সংখ্যাটির অর্দ্ধ যোগ করিয়া তাহার তিনগুণকে শূণ্য দ্বারা ভাগ করিলে ৬৩ হইবে।

ন্যাসঃ। ০। ত্রতৎপঞ্চ- যুতং জাতম্। ৫। স্বস্যবর্গঃ। ০। মূলম্। ০। ঘনম্। ০। তন্মূলম্। ০।

ন্যাসঃ। ৫। স্বেন গুণিতা জাতাঃ। ০।

ন্যাস। ১০। এতে স্বভক্তাঃ। ১০/০

বর্ণনা—শূন্যের সহিত পাঁচ যোগ করিলে ৫ হইবে। শূন্যের বর্গ করিলে শূন্য হইবে। শূন্যের বর্গমূল শূন্য হইবে। শূন্যের ঘন শূন্য হইবে।

বর্ণনা—শূন্যের সহিত পাঁচ গুণ করিলে শূন্য হইবে।

বর্ণনা—১০। ইহাকে শূন্য দিয়া ভাগ করিলে ১০/০

অজ্ঞাতো রাশিস্তস্য গুণঃ ০। সার্দ্ধংক্ষেপঃ ১/২ গুণঃ। ৩। হরঃ। ০ দৃশ্যং। ৬৩। ততো বক্ষ্যমানেন বিলোমবিধিনা ইষ্টকর্ম্মণা বা লব্ধো রাশিঃ ১৪। অস্য গণিতস্য গ্রহগণিতে মহানুপযোগঃ।

একটি অজ্ঞাত রাশি লওয়া হইল, ইহাকে শূন্য দ্বারা গুণ করা হইল ইহার সহিত ১/২ যোগ করা হইল। ইহার সহিত তিন গুণ করা হইল; শূন্য দ্বারা ভাগ করা হইল। এক্ষণে রাশিটি হইবে ৬৩। এক্ষণে বিপরীত প্রণালীতে অথবা সাধারণ নিয়মানুসারে রাশিটি হইবে ১৪। নাক্ষত্রিক গণনাতে ইহার বিশেষ প্রচলন দেখা যায়।

অজ্ঞাত রাশি=১৪।

"তৃতীয়োঽধ্যায়"

(প্রথমঃ পরিচ্ছেদ :)

অথ ব্যস্তবিধৌ করণ স্বত্রং বৃত্তদ্বয়ম্। ছেদং গুণং গুণং ছেদং বর্গ মূলং পদং কৃতিম্। ঋণং স্বং স্বমৃণং কুর্যাৎ দৃশ্যে রাশি প্রসিদ্ধয়ে॥ অথ স্বাংশাধিকোনে তু লবা ঢ্যোনো হরোহরঃ। অংশস্ত বিকৃত স্তত্র বিলোমে শেষ মুক্তবৎ॥ ৪৭—৪৮।

রাশির বৈপরীত্য বিধির দুইটি অনুচ্ছেদ। ভাজককে গুণ্য কর এবং গুণ্যকে ভাজক কর, বর্গকে বর্গমূল কর এবং বর্গমূলকে বর্গ কর। ঋণ রাশিকে ধন রাশি এবং ধন রাশিকে ঋণ রাশি কর। যদি কোন সংখ্যা তাহার নিজের ক্ষুদ্র অংশের দ্বারা বর্দ্ধিত বা হ্রাস প্রাপ্ত হয় তবে লবের দ্বারা হরকে বর্দ্ধিত বা হ্রাস করিলে হর প্রাপ্ত হওয়া যাইবে। আর লব অপরিবর্তিত থাকিবে। এইভাবে করিতে থাকিলে পাওয়া যাইবে।

অত্রোদ্দেশকঃ। যস্ত্রিয় স্ত্রিভিরন্বিতঃ স্বচরণৈ র্ভক্তস্ততঃ সপ্তভিঃ স্বস্ত্র্যাংশেন বিবর্জিতঃ স্বগুণিতো হীনো দ্বিপঞ্চাশতা। তন্মূলে ইষ্ট যুতে হৃতেহপি দশভির্জাতং দ্বয়ং ব্রূহি তং রাশিং বেৎসি হি চঞ্চলাক্ষি বিমলাং বালে বিলোমক্রিয়াম্॥ ৪৯

হে সুন্দরি চটুল নয়নে বালিকে! যদি তোমার বিলোম ক্রিয়াতে দক্ষতা থাকে তো বল। তিন দ্বারা গুণ করিলে এবং গুণ ফলের তিনের চার অংশ যোগ করিলে এবং সাত দিয়া ভাগ করিলে এবং ভাগ ফলের একের তিন অংশ বিয়োগ করিলে এবং সেই রাশির দ্বারা গুণ করিলে এবং তাহা হইতে বাহান্ন বিয়োগ করিয়া তাহার বর্গমূল নির্ণয় করিতে হইবে, তাহার সহিত আট যোগ করিতে হইবে এবং সেই রাশিকে দশ দ্বারা ভাগ করিলে দুই—হইবে। ন্যাসঃ। গুণঃ ৩। ক্ষেপঃ ৩/৪। ভাজকঃ ৭। ঋণং ১/৩। বর্গ। ঋণম্ ৫২। মূলম্। ক্ষেপঃ ৮। হরঃ ১০। দৃশ্যম্ ২। যথোক্ত করণেন জাতো রাশিঃ। ২৮।

বর্ণনা—গুণ্য—৩। যোগ ৩/৪। ভাজক ৭। বিয়োগ ১/৩। বর্গ। বিয়োগ ৫২। বর্গমূল। যোগ ৮। ভাজকে ১০। প্রদত্ত রাশি ২৮।

এই ভাবে অগ্রসর হইলে নির্ণেয় রাশি হইবে ২৮। ইতি ব্যস্তবিধিঃ।

অথেষ্ট কর্ম্মস্থ করণ স্বত্রং বৃত্তম্। উদ্দেশ কালাপবদিষ্ট রাশিঃ ক্ষুণ্ণো হৃতোহংশৌ রহিতো যুতো বা। ইষ্টাহতং দৃষ্টমনেন ভক্তং রাশির্ভবেদ্ প্রোক্তমিতীষ্ট কর্ম্ম। ৫০।

ইষ্টকর্ম্মতে একটি অনুচ্ছেদ।

যে কোন রাশি ইচ্ছানুরূপ ধরিয়া লইলেই চলিবে। তাহাকে গুণ করিলে অথবা ভাগ করিলে এবং ভগ্নাংশের দ্বারা যোগ অথবা বিয়োগ করিলে প্রদত্ত রাশি ধরিয়া লওয়া রাশি দ্বারা গুণ করিলে এবং তাহা দ্বারা ভাগ করিলে নির্ণেয় রাশি বাহির হইবে। ইহাকেই ইষ্টকর্ম্ম বলা হয়।

অত্রোদ্দেশকঃ। পঞ্চঘ্নঃ স্বত্রিভাগোনো দশভক্তঃ সমন্বিতঃ। রাশিত্র্যংশার্দ্ধপাদৈঃ স্যাৎকো রাশির্দ্ব্যূন সপ্ততিঃ॥ ৫১।

উদাহরণ—এমন কোন সংখ্যা আছে, যাহাকে পাঁচ দ্বারা গুণ করিয়া গুণ ফলের সহিত মূল সংখ্যার ১/৩, ১/২. ১/৪ অংশ যোগ করিলে দুই কম সত্তর পাওয়া যায়।

ন্যাসঃ। গুণঃ ৫। স্ব ত্রিভাগঃ। হরঃ ১০। রাশ্যাংশাঃ ১/৩ ১/২ ১/৪ দৃশ্যম্ ৬৮।

বর্ণনা—৫ দ্বারা গুণ। ১/৩ তাহা হইতে বিয়োগ। দশ দ্বারা ভাগ। পরে ইহার সহিত ১/৩ ১/২ ১/৪ যোগ করিতে হইবে। নির্ণেয় রাশি ৬৮ হইবে।

অত্র কিল কল্পিত রাশিঃ ৩। পঞ্চঘ্নঃ ১৫। স্ব ত্রিভাগোনঃ।

দশভক্তঃ ১। কল্পিত ৩। রাশেস্ত্র্যংশার্দ্ধপাদৈঃ $\frac{১}{৩}$, $\frac{১}{২}$, $\frac{১}{৪}$ সমন্বিতো হরো জাতঃ $\frac{১৭}{৪}$ অথ দৃষ্টম্। ৬৮। ইষ্টেন ৩। গুণিতম্ ১০৪ $\frac{১৭}{৪}$ হরেণ ভক্তং জাতো রাশিঃ ৪৮।

এবং সর্ব্বত্রোদাহরণে রাশিঃ কেন চিদ্‌গুণিতো ভক্তো বা রাশ্যংশেন রহিতো যুতো বা ইষ্টস্তত্রেষ্টং রাশিং প্রকল্প্য তস্মিন্নুদ্দেশ কালাপ বৎ কর্ম্মণি কৃতে যন্নিষ্পদ্যতে তেন ভজেদ্ দৃষ্ট মিষ্টগুণং ফলং রাশিঃ স্যাৎ।

ধরিয়া লওয়া হইল রাশি ৩। ৫ দিয়া গুণকরা হইল=১৫। একের তিন অংশ বাদ দেওয়া হইল=১০। দশ দ্বারা ভাগ করা হইল=১। যে রাশি ধরা হইয়াছিল অর্থৎ ৩ ইহার সহিত $\frac{১}{৩}$, $\frac{১}{২}$ এবং $\frac{১}{৪}$ যোগ করা হইল অর্থাৎ $\frac{১}{৩}$, $\frac{১}{২}$, $\frac{১}{৪}$ যোগ ফল হইল $\frac{১৭}{৪}$। ৬৮ কে ইহার দ্বারা ভাগ করা হইল। অতএব $\frac{৪}{\cancel{৬৮}} \times \frac{৪}{\cancel{১৭}} \times \frac{৩}{১} = ৪৮$।

এইভাবে যে কোন রাশি এক ধরিয়া লইলে সকল ক্ষেত্রেই এই একই রকম হইবে।

এই ভাবে যে কোন রাশি গ্রহণ করিলে এবং তাহাকে গুণ করিলে অথবা যে কোন ভগ্নাংশ লইয়া যোগ করিলে বা বিয়োগ করিলে যে রাশি ধরিয়া লওয়া হইয়াছিল তাহাই হইবে। যে ফল হইবে তাহাকে প্রদত্ত রাশি দ্বারা ভাগ করিলে ভাগ ফল সেই অনুসন্ধেয় রাশি হইবে।

অত্র দৃষ্টজাত্যুদাহরণম্। যূথার্দ্ধং সত্রিভাগং বন বিচরবৃতং কুঞ্জরাণাঞ্চ ইষ্টং ষড়ভাগশ্চৈব নদ্যাং পিবতি চ সলিলং সপ্তমাংশেন মিশ্রঃ। পদ্মিন্যা চাষ্টমাংশঃ স্বনবম সহিতঃ ক্রীড়তে মাঙ্গরাগো নাগেন্দ্রো হস্তিনীভিস্ত্রিস্থভি রমুগতঃ কা ভবেৎ যূথসঙ্খ্যা ৫১।

ইহার উদাহরণ বর্ণিত হইতেছে—একটি হস্তীর দল হইতে ইহার তৃতীয়াংশ হইতে অর্দ্ধেক বন মধ্যে বিচরণ করিতেছিল। ইহার সপ্তমাংশের সহিত একের ষষ্ঠাংশ নদীতে জলপান করিতে গিয়াছিল। ইহার অষ্টমাংশ একের নবমাংশের সহিত পদ্মবনে খেলা করিতে গিয়াছিল। দলপতিকে তিনটি স্ত্রী হস্তিনীর সহিত দেখা গেল। সেই দলে কতগুলি হস্তী ছিল?

ন্যাসঃ—$\frac{১}{২}$ $\frac{১}{৬}$ $\frac{১}{৮}$ দৃশ্যম্ ৪।

$\frac{১}{৩}$ $\frac{১}{৭}$ $\frac{১}{৯}$

এবাং সবর্ণনং দ্বাভ্যাম্ অপবর্ত্তিতং $\frac{১}{৩}$ [illegible] [illegible]

পুনরেষাং সবর্ণিতানামৈক্যং নবভিরপবর্ত্তিতং [illegible]

ইষ্টোনং [illegible]

অনেন দৃষ্টে। ৪। ইষ্টগুণিতে ভক্তে জাতা হস্তিসংখ্যা—১০০৮।

বর্ণনা— $\frac{১}{২}$, $\frac{১}{৬}$, $\frac{১}{৮}$

$\frac{১}{৩}$, $\frac{১}{৭}$, $\frac{১}{৯}$ দেওয়া আছে ৪

অপরোদাহরণম্। অমলকমলরাশেস্ত্র্যংশ পঞ্চাংশ ষষ্ঠৈস্ত্রিনয়ন হরিসূর্য্যা যেন তুর্য্যেণ চার্য্যা গুরুপদমথ ষড়্‌ভিঃ পূজিতং শেষপদ্মৈঃ সকল কমল সংখ্যাং ক্ষিপমাখ্যাহি তস্য। ৫২ [ক্রমশঃ]

বিমান গতিবিধির অঙ্ক
(Aerial Navigation)
প্রাথমিক

যে যুগে আমরা বাস করি, নিঃসন্দেহে তাহাকে বিমানেরই যুগ বলা যায়। এ যুগে, স্বাভাবিক জীবন যাত্রায় এবং যুদ্ধকালে বিমান বিশেষ অংশ গ্রহণ করে। আমরা প্রত্যেকেই বিমানের খুঁটিনাটি এবং উহার গতিবিধি জানিতে খুবই উৎসুক, আকাশ পথে কি ভাবে বিমান যাতায়াত করে, কলিকাতা ত্যাগ করিয়া কি ভাবে উহা সুদূর নিউইয়র্কে পৌঁছায় এবং কোন অঙ্ক বিমান চালককে পথ নির্ণয় করিতে—স্থান নির্ণয় করিতে সাহায্য করে তাহা বুঝিয়া দেখিতে চাহি।

বিমানের গতিবিধি অর্থাৎ যাতায়াত সম্বন্ধে ভালরূপে জানিতে হইলে সর্বাগ্রে আমাদের পৃথিবী বিষয়ে ধারণা থাকা দরকার। পৃথিবী গোলাকার এবং উহার নানাবিধ বিষয় বুঝা প্রয়োজন।

গোলকরূপ পৃথিবী॥ গোলক বলিতে কঠিন বা ঘন বুঝায়, এবং যাহার পৃষ্ঠের একবিন্দু হইতে অন্য বিন্দু—মধ্যস্থিত কেন্দ্র হইতে সমান দূরে অবস্থিত। ● কেন্দ্র হইতে পৃষ্ঠ পর্য্যন্ত যে রেখা টানা যায় তাহাকে ব্যাসার্ধ বলে। ● পৃষ্ঠের এক প্রান্ত হইতে যে সরল রেখা কেন্দ্র ভেদ করিয়া বিপরীত প্রান্ত পর্য্যন্ত টানা হয়, অর্থাৎ দুই প্রান্ত স্পর্শ করে, তাহাকে ব্যাস বলে। ● ফলে দুইটি ব্যাসার্ধে একটি পূর্ণ ব্যাস হয়।

২ ব্যাসার্ধ=১ ব্যাস (রেখা)

যে পৃথিবীতে আমরা বাস করি তাহা প্রায় সম্পূর্ণরূপে একটি গোলক। ইহার ব্যাস ৭৯২০ মাইল।

বৃত্ত॥ ক্ষেত্র বলিতে যখন সমতল বুঝায়, তখন উহার সংজ্ঞা আমরা সকলেই জানি। সমতল—যেমন জানলার কাঁচ, করাতের পার্শ্ব অথবা টেবিলের উপরিভাগ সমতল। ● যে কোন কাঠের বল বা গোলক আমরা যদি করাত দিয়া দুই ভাগ করি, তাহা হইলে সেই বিভক্ত-করার জন্য যে সমতলের উদ্ভব হয় তাহা নিছক বৃত্তরূপে দেখা দেয়। অতএব, এই সূত্রে, আমরা একটি বিশেষ ব্যাপারও উপলব্ধি করি, যে, যখনই কোন গোলক—ক্ষেত্র বা সমতল দ্বারা বিভক্ত হয়,—তখনই প্রতিচ্ছেদ, বৃত্ত হইয়া দেখা দেয়। সেই ক্ষেত্র বা সমতল—যাহার দ্বারা আমরা বিভক্ত করি—যখন তাহা গোলক কেন্দ্র ভেদ করিয়া যায় তখন বৃহৎ বৃত্ত দেখা যায়। উহার ব্যাস ও গোলকের ব্যাস সমান। সেই ছেদকারী ক্ষেত্র বা সমতল যখন গোলক কেন্দ্র ভেদ করিয়া না যায় তখন ক্ষুদ্রাকার বৃত্ত দেখা যায়।

বিষুব রেখা (নিরক্ষ বৃত্ত)। বিষুব রেখা বা নিরক্ষ বৃত্তই পৃথিবীর—গোলকের সর্ববৃহৎ বৃত্ত। এই বিষুব রেখা হইতে অতীব দূরে অবস্থিত দুই অক্ষ প্রান্তের (বিন্দুদের) একটিকে উত্তর মেরু বা সুমেরু এবং অন্যটিকে দক্ষিণ মেরু বা কুমেরু বলা হয়, এই দুই মেরু হইতে যে রেখা টানা যায় তাহাকে মধ্যরেখা বা মেরিডিয়ান বলে, এবং এই মধ্যরেখাগুলি বিষুব রেখা বা নিরক্ষ বৃত্ত সম্বন্ধে লম্ব।

গোলক, পৃষ্ঠের নির্দ্দিষ্ট দুই প্রান্তে অবস্থিত বিন্দু দুইটিকে স্পর্শ বা ভেদ করিয়া একটি মাত্র বৃহৎ বৃত্ত অঙ্কিত করা যায় এবং দেখা যায়, উহা ছাড়াও, গোলক পৃষ্ঠের বিভিন্ন অংশে আমরা অসংখ্য বৃত্ত আঁকিতে পারি।

অক্ষাংশ সমান্তরাল। অক্ষাংশের সমান্তরালগুলি ক্রম ক্ষুদ্রাকার বৃত্ত, ইহাদের ক্ষেত্র বা সমতলগুলি বলিতে গেলে নিরক্ষ বৃত্তের ক্ষেত্রের সমান্তরাল। অতএব—কর্কট ক্রান্তি, মকর ক্রান্তি, সুমেরুবৃত্ত এবং কুমেরু-বৃত্ত সকল অক্ষাংশের বিভিন্ন সমান্তরাল, এবং জ্যোতিষ বিদ্যায় এই সকল বৃত্তগুলির খুবই গুরুত্ব আছে।

অক্ষাংশ ও দ্রাঘিমা। বৃত্তের অর্থাৎ পরিধির যে কোন অংশকে চাপ বলে। কোণকে যেমন আমরা ডিগ্রি দ্বারা মাপিয়া থাকি—তেমনই চাপকেও আমরা ডিগ্রি দ্বারা মাপিতে পারি—এবং সেই মাপকে, চাপ-ডিগ্রি বলে। এক চাপ ডিগ্রি বৃত্তের পরিধির ১/৩৬০ অংশ।

এই এক অংশ বা এক ডিগ্রিকে ষাট ভাগে (৬০ ভাগে) সমান ভাগ করা হয়। এক একটি ভাগকে মিনিট বলে, আবার এই মিনিটকে সমান ৬০ ভাগে—ভাগ করা হয় এবং এক একটি ভাগকে সেকেণ্ড বলে।

বৃত্ত=৩৬০ ডিগ্রি।
ডিগ্রি= $\frac{\text{বৃত্ত}}{৩৬০}$
১/৩৬০ বা এক ডিগ্রি=৬০ মিনিট। মিনিট চিহ্ন ′
১ মিনিট=৬০ সেকেণ্ড। সেকেণ্ড চিহ্ন ″

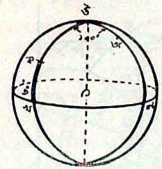
প্রকৃত পক্ষে উত্তর অথবা দক্ষিণে অবস্থিত ভূপৃষ্ঠের যে কোন একটি বিন্দুর অক্ষাংশকে ডিগ্রি হিসাবে মধ্যরেখা ধরিয়া মাপা যায়; মধ্যরেখাগুলির মধ্যে একটির বিশেষ নাম আছে—উহাকে প্রাইম মেরিডিয়ান বলে। এই প্রাইম মেরিডিয়ান, ইংলণ্ডের লণ্ডন সহরের নিকট দিয়া চলিয়া গিয়াছে।

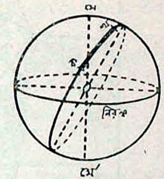
একটি বিন্দুর দ্রাঘিমা মেরুর উপরে মধ্যরেখার যোগে—অর্থাৎ মধ্যরেখা বা প্রাইম মেরিডিয়ান সেই বিন্দুকে ভেদ করার ফলে—কোণ সৃষ্ট হয়; প্রাইম মেরিডিয়নের পূর্বে বা পশ্চিমে বিন্দুর অবস্থিতি অনুযায়ী পূর্ব দ্রাঘিমা বা পশ্চিম দ্রাঘিমা বলা হয়।

নকশা দেখ (১নং)। খ গ, বিষুব রেখা, অ লণ্ডন নগরের স্থান, মধ্যরেখা উ অ গ দ—মধ্যরেখাই প্রাইম মেরিডিয়ান। উ এবং দ সুমেরু এবং কুমেরু।

এখন 'ক' একটি বিন্দু—যাহার অক্ষাংশ এবং দ্রাঘিমা স্থির করিতে হইবে। 'ক' এর অক্ষাংশ—ক অ চাপের দৈর্ঘ এই সূত্রে ৩০°, ক এর দ্রাঘিমা অ, উ, ক কোণ অর্থাৎ এই সূত্রে ১০০°। ফলে ক অক্ষাংশ ৩০° উত্তর ও দ্রাঘিমা ১০০° পশ্চিমে অবস্থিত। ভূপৃষ্ঠের যে কোন বিন্দুর সঠিক অবস্থিতি অক্ষাংশ ও দ্রাঘিমার দ্বারা নির্দ্দিষ্ট হয়। বিষুব রেখা হইতে দুইটি মেরুই ৯০° অন্তরে, তাই নকশার চাপ উ, ক, এর দূরত্ব সুমেরু হইতে ৬০° ডিগ্রি মাত্র—ইহাকে মেরু-দূরত্ব বা (polar distance) বলে,—

এখন ইহাই 'ক' বিন্দুর মেরু-দূরত্ব। যে কোন বিন্দুর মেরু-দূরত্বকে অক্ষাংশের পূরক Complement হিসাবে ধরা হয়।


১নং


২নং

জিওড্যাসিক (geodesic)। দুইটি বিন্দুর মধ্যে অতি অল্প দূরত্ব বিশিষ্ট রেখাকে জিওড্যাসিক বলে। ইহাকে অর্থাৎ এরূপ রেখা যখন সমতলে অঙ্কিত হয় তখন সেই রেখাকে সরল রেখা বলা হয়। গোলক পৃষ্ঠের উপর কোন ক্রমেই সরল রেখা টানা সম্ভব নয়। (তবু আমরা অনেক ক্ষেত্রে সরল-রেখা কথাটি ব্যবহার করিয়াছি)

গোলক পৃষ্ঠে দুইটি বিন্দুর মধ্যে অতি অল্প দূরত্ববিশিষ্ট ক্ষুদ্র রেখাই বৃহৎ বৃত্তের দ্বারা যুক্ত বা বৃত্তের অংশ, উহা হ্রস্ব চাপ (মাইনর আর্ক) (নকশা ২নং) ক ও খ রেখা অতি অল্প দূরত্ববিশিষ্ট।

এ ব্যাপারে—ভূপৃষ্ঠকে গোলকরূপে সঠিক ধারণা করিতে হইলে, হাতের কাছে একটি ভূ-গোলক প্রয়োজন, নিম্নলিখিত কথাগুলি ঠিক কিনা ভূ-গোলকের সাহায্যে বুঝিয়া দেখ।

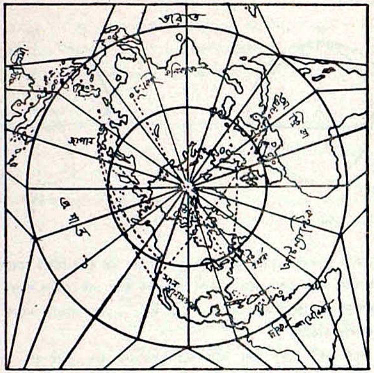
নিউইয়র্ক হইতে বোরনিও দ্বীপ পর্য্যন্ত যে সোজা রেখা টানা হয় তাহা কি উত্তর মেরুর উপর দিয়া যায়?

সানফ্রানসিসকো হইতে কায়রোর দূরত্ব কি গ্রীণল্যাণ্ডের উপর দিয়া খুবই কম?

লস এন্‌জেলিস ও টোকিওকে যদি জিওড্যাসিক দ্বারা যোগ করা হয় তাহা হইলে জিওড্যাসিক কি আলুসীয়ান দ্বীপের নিকট দিয়া যায়।

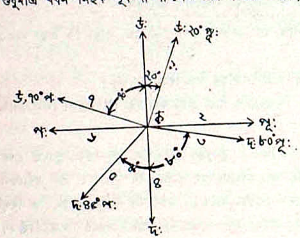
রেখার দিক-পাত (Bearing of a line) ভূ-পৃষ্ঠের যে কোন বিন্দু হইতে সুমেরু ভেদ করিয়া যে বৃহৎ বৃত্ত অঙ্কিত হয়, পূর্বেই বলা হইয়াছে এই বৃত্তের নাম মধ্যরেখা, এই মধ্যরেখা উত্তর ও দক্ষিণ অর্থাৎ সুমেরু ও কুমেরুকে ঘিরিয়া থাকে। এখন যদি কোন লোক, ক বিন্দু হইতে, মধ্য-রেখার পূর্বমুখে ভ্রমন করিতে থাকে, এবং আমরা যদি তাহার পথের দিক নির্দ্ধারণ করিতে চাই, তাহা হইলে দেখিব—মধ্য-রেখা হইতে ৩০° কোণে উহা অবস্থিত; এবং এই ভাবে,

দিক পাত বা বেয়ারিং নির্দ্ধারণকে লিখিত ভাবে প্রকাশ করা হয়—উত্তর ৩০° ডিগ্রি পূর্ব (উ ৩০° পূ)।



মেরু কেন্দ্রিক মানচিত্র

নকশাতে, নানাবিধ রেখা গুলির 'দিক-পাত' (বেয়ারিং) সম্পর্কে সঠিক কারণ দেখান হইল। শুধুমাত্র যখন নিছক পূর্ব বা পশ্চিম উল্লেখ করিতে হইবে, তখন ছাড়া, আমাদের যে কোন দিক-পাত ব্যাপারেই উত্তর ও দক্ষিণের কথা সর্বাগ্রে উল্লেখ করিতে হইবে।



বিমান চালকরা আর একটি সাধারণ নিয়মে 'দিক-পাত' নির্দ্ধারণ করে। এই দ্বিতীয় নিয়ম আগেকার নিয়ম হইতে অনেক সহজ। বিমান চালকরা, উত্তর রেখার সহিত নির্দ্দিষ্ট কোন রেখার যে কোণ সৃষ্ট হয়, প্রথমে তাহাই বিবেচনা করে। এই বিবেচনায়, বিমানচালকরা সকল সময় বামাবর্ত (ক্লকওয়াইজ) ঘড়ি কাঁটার পথে অর্থাৎ পূর্বমুখী, অগ্রসর হয়, যতক্ষণ পর্য্যন্ত

না নির্দ্দিষ্ট রেখায় পৌঁছায়। অর্থাৎ মধ্যরেখার উত্তর হইতে শুরু করিয়া সমস্ত বৃত্তকে, সংখ্যায় ভাগ করে ১ হইতে ৩৬০ এ গণনা শেষ হয়। যখন প্রয়োজন হয় বিমান চালক এই হিসাবে মধ্য-রেখা হইতে নির্দিষ্ট রেখার কোণের মাপ লয়। এই ধরণে, নকশা-লিখিত রেখাগুলির দিক-পাত ১নং ২০° ২নং ৯০° ৩নং ১০০° ৪নং ১৮০° ৫নং ২২৫° ৬নং ২৭০° ৭নং ২৯০°। দিক-নির্দ্ধারণের সমস্ত প্রশ্নের ব্যাপারে দুই দিকেরই দিক-পাত উল্লেখ করা দরকার।

বৃহৎ বৃত্তের রেখা সঠিক পর্য্যবেক্ষণ করা কার্য্যসাধ্য নয়। তাহাছাড়া কোন জাহাজ বা বিমানের পক্ষে বৃহৎ বৃত্ত রেখা ধরিয়া চলাও সম্ভব নয়। কারণ, ঐ রেখার দিক-পাত অনবরত বদল হয়। তাই, কার্য্যের সুবিধার জন্য, বৃহৎ বৃত্তের ২০০ কখনও ৩০০ মাইল দূরে দূরে বিন্দু স্থির করা আছে। এই বিন্দু হইতে অন্য বিন্দুতে যে দিক-পাত দেখা দেয়, সেই দিক পাতের কোন পরিবর্তন না করিয়া বিমান চালকরা যাতায়াত করে। ভূ-পৃষ্ঠের এই সকল সরল-রেখা, যাহার দিক-পাত পরিবর্তন হয় না—তাহাকে **রাম্ব লাইন** (Rhumb line) বলে। ছোট ছোট রাম্ব লাইনের ফলে যে পথ সৃষ্টি হয় তাহা প্রায় বৃহৎ বৃত্তের সমান।

জিজ্ঞাসা:

জাহাজ বা বিমানের পক্ষে লণ্ডন হইতে নিউইয়র্ক পর্য্যন্ত একটি সোজা সরল-রেখা ধরিয়া যাওয়া কি সম্ভব?

একটি গোলকের প্রত্যেকটি বৃহৎ বৃত্তই কি সমান—? বিবরণ দাও।

গোলকের ছোট বৃত্তগুলি কি সব সমান? যদি না হয়, প্রমাণ কর; কর্কট ক্রান্তি ও সুমেরু বৃত্তের মধ্যে কোনটি বড়?

সুমেরু বৃত্ত ও কুমেরু বৃত্তের মধ্যে কোনটি বড় বা ছোট?

বিষুব রেখার দৈর্ঘ্য বল।

বিষুব রেখার এক মিনিট চাপের দৈর্ঘ্য কত তাহা নির্ণয় কর? এই দৈর্ঘ্য বা দূরত্বকে ভৌগলিক মাইল, বা নৌ-মাইল (nautical) বা নট (Knot) কি হিসাবে বলা হয়।

সুমেরু বৃত্তের দৈর্ঘ্য কত যদি তাহার ব্যাসার্ধ ১৫৭৭ মাইল হয়।

সুমেরু বৃত্তের মেরু-দূরত্ব-polar distance-২৩°২৮' যদি হয়, তাহা হইলে তাহার অক্ষাংশ কত?

যদি কোন ব্যক্তি ওয়াশিংটন হইতে ক্রমাগত পূর্বমুখী ভ্রমন করিয়া পৃথিবী পরিক্রমণ করে, কি ধরণের বক্র রেখা (curve) সে ব্যক্তি অনুসরণ করিবে?

কেন পৃথিবীর ভূ-পৃষ্ঠের অল্প অংশকে সমতল বলিয়া গণ্য করিতে পারি?

যদি একজন বিমান চালক সর্বসমেত ২৫০ মাইল উঃ ২৬° পূঃ (২৬°) দিকে যাত্রা করে তাহা হইলে কত মাইল পূর্বে এবং কত মাইল উত্তরে তাহাকে যাইতে হইবে?

(ভূ-পৃষ্ঠের অল্প অংশকে সমতলরূপে ধরিয়া এবং ত্রিকোণমিতি দ্বারা বিচার কর।)

নিম্নলিখিতের কোনটি সত্য বা অসত্য বিচার কর।

সাধারণত, গোলকের নির্দিষ্ট দুইটি বিন্দু স্পর্শ করিয়া একটি মাত্র বৃহৎ বৃত্ত অঙ্কিত করা যায়।

একটি মাত্র বৃহৎ বৃত্তের দ্বারা সুমেরু কুমেরু ভেদ করিয়া যাওয়া যায়।

ভূ-পৃষ্ঠের নির্দিষ্ট দুইটি বিন্দুকে স্পর্শ করিয়া একটি মাত্র ক্ষুদ্র বৃত্ত টানা যায়।

ভূ-পৃষ্ঠের যে কোন বিন্দু হইতে মধ্য-রেখা টানা যায়।

একজন যদি মধ্যরেখা ধরিয়া ক্রমাগত চলিতে থাকে তাহা হইলে সে হয় উত্তরে নয় দক্ষিণে পৌছাইবে।

পূর্ব ও পশ্চিম রেখার সকল বিন্দুরই একই অক্ষাংশ।

দুইটি বিভিন্ন বিন্দু যদি একই দ্রাঘিমায় অবস্থিত হয়, তাহা হইলে ধরিতে হইবে উহারা একই মধ্য-রেখায় আছে।

সুমেরুর প্রত্যেকটি অনুভূমিক রেখাই উহার দক্ষিণে অবস্থিত।

বিষুব রেখা সর্ববৃহৎ-বৃত্ত যাহা পূর্ব পশ্চিমে চলিয়া গিয়াছে।

রাম্ব লাইন একটি বৃহৎ বৃত্ত।

অক্ষাংশর যে কোন সমান্তরালই রাম্ব লাইন।

একজন বিমান চালককে অনেক বিষয় ভাবিয়া চিন্তা করিয়া দেখিতে হয়, বহু সমস্যার সমাধান করিতে হয়। প্রথমত সমস্যাগুলির মধ্যে ধরা যায় :— তেল (পেটরোল), গতি, আবহাওয়া, দৃষ্টি গোচরতা, বায়ুর দিক ও তাহার বেগ বা দ্রুততা এবং ভাল ও নির্বিঘ্ন পথ ইত্যাদি।

নিম্নলিখিত সমস্যাগুলি একান্ত প্রাথমিক এবং এইগুলি কয়েকটি বিশেষ নিয়ম দ্বারা অনুধাবন যোগ্য।

একটি বিমান ৩৫০ গ্যালন তেল লইতে পারে। ঘণ্টায় ২৫ গ্যালন তেল খরচ হয়, ঘণ্টায় ১২০ মাইল গতিতে যায়। কত ঘণ্টা এবং কত মাইল তেল না লইয়া ভ্রমণ করিতে পারিবে ?

একটি জ্বালানী তেলের আধার ট্যাংকের মাপ ৫ ফুট লম্বা, ৪ ফুট চওড়া, ৬ ফুট গভীর ; প্রতি কিউবিক ফুটে যদি ৭½ গ্যালন তেল ধরে ; তাহা হইলে সেই ট্যাংকে সর্ব সমেত কত তেল ধরিবে এবং গ্যালনে যদি মাত্র ৩ মাইল যায় তাহা হইলে সর্বসমেত কত মাইল যাইবে ?

একটি বিমান ৮০০ গ্যালন তেল লইতে পারে। সেই তেলের মধ্যে শতকরা ২০ ভাগ তেল যদি হঠাৎ-প্রয়োজনের জন্য রাখে, এবং ঘণ্টায় ৩০ গ্যালন যদি খরচ করে, তাহা হইলে কতক্ষন পরে তাহাকে পুনায় তেল ভরিতে হইবে ?

একজন বিমান চালক বুঝিল, ১৫০ মাইল ঘণ্টায় যখন সে যায়, তখন শতকরা ৩ ভাগ তেল—১০০ মাইল ঘণ্টায় যখন সে যায়, তাহা হইতে বেশী খরচ করিয়াছে। এখন যে তেল আছে কম গতিতে ১০ ঘণ্টা যাইতে পারিবে, যদি খুব দ্রুত গতিতে যায় তাহা হইলে কতক্ষণ সে যাইতে পারিবে ; কি হারে কতদূর পর্য্যন্ত যাইবে ?

বিরাট বিমানগুলি একসঙ্গে ২০০০ গ্যালন তেল লইতে পারে। এক্ষেত্রে, সেই তেলের

ট্যাংকের মাপ কিউবিক ফুটে নির্ণয় কর, যদি ২৩১ কিউবিক ইঞ্চিতে এক গ্যালন তেল ধরে।

একজন বিমান চালক 'ক' হইতে 'খ' পর্য্যন্ত যাইবে এবং ফিরিয়া আসিবে, যাতায়াতে ১৮০০ মাইল। বায়ুবেগ বেশী থাকার দরুণ প্রত্যাবর্তনের সময়, অর্থাৎ ফিরিয়া আসিবার সময় ৫০% তেল যাইবার সময় হইতে বেশী লাগে ; যদি প্রথম ১০০ শত মাইলে ৩০ গ্যালন তেল খরচ হয়, তাহা হইলে যাতায়াতে সর্বসমেত কত গ্যালন তেল লাগিবে ?

একজন বিমান চালক ২৫০০ মাইল একেবারে কোথাও না থামিয়া ১টি সফর করার পরিকল্পনা করিল। হিসাবে বুঝিল, ১৮ ঘণ্টা সময় একুনে লাগিবে, এবং ঘণ্টায় ৪০ গ্যালন তেল খরচ হইবে। তাহার বিমান ট্যাংকে মাত্র ৩৫০ গ্যালন তেল লইতে পারে। হিসাবমত উপরন্ত তেল লইবার জন্য কয়েকটি ১০০ গ্যালন ড্রাম লইবে ঠিক করিল, এবং যত তেল লাগিবে তাহার শতকরা ২০ ভাগ বেশী তেল—যদি দরকার পড়ে সেইজন্য লইবে স্থির করিল—এই ব্যাপারে কতগুলি ড্রাম তাহাকে লইতে হইবে।

নৌচালকের কম্পাস (compass)। বিমান চালকের এই কম্পাস সম্পর্কে খুব ভাল ভাবে জ্ঞান থাকা উচিত। এই কম্পাস দিকপাত রেখা নির্ণয় করার জন্য অপরিহার্য্য।

আমরা সকলেই জানি কম্পাসের কাঁটা সকল সময় উত্তর অভিমুখে দেখায় কিন্তু সত্যই উহা উত্তর দিক দেখায় না, উহা উত্তর-চম্বুক-অক্ষ নির্দেশ করে। এই উত্তর-চম্বুক-অক্ষ কানাডার হাডসন বের নিকট অবস্থিত। কম্পাসের কাঁটা যে উত্তর দিক নির্দেশ করে তাহাকে চম্বুকী উত্তর বা ম্যাগনেটিক নর্থ (magnetic north) বলা হয়।

ভূপৃষ্ঠের যে কোন বিন্দুতেই আদত উত্তর ও চম্বুকী উত্তরের মধ্যে যে ব্যবধান বা পার্থক্য ঘটে—তাহাকে সেই স্থানের চম্বুক-আনত বা ম্যাগনেটিক ডিক্লাইনেসন (magnetic declination) বলে। চম্বুক আনত-র পার্থক্য যে বিভিন্ন স্থানে শুধুমাত্র আলাদা তাহা নয়, সেই সকল স্থানে ধীরে ধীরে চম্বুক আনত র তারতম্য ঘটে। কোন অজানা কারণে পৃথিবীর চম্বুক অক্ষের স্থানের পরিবর্তন হয়।

এই পরিবর্তন ও পার্থক্য বিষয়ে অনেক পত্র-কোষ্ঠী (table) প্রকাশিত হইয়াছে। যে পত্র-কোষ্ঠীর মধ্যে বিশেষত আমেরিকায় চম্বুক আনত ও তাহার দিকবিধি দেখান হইয়াছে, এবং সেই সঙ্গে চম্বুক আনতে-র পরিবর্তন এবং সেই-পরিবর্তনের দিকবিধি দেখান হইয়াছে।

এখন আমরা যদি একটি চম্বুক কাঁটাকে এমন ভাবে ঝুলাইয়া রাখি, যাহাতে কাঁটাটি যে কোন দিকেই অনায়াসে পরিবর্তিত হইতে পারে। তখন দেখা যাইবে কাঁটাটি, সাধারণত স্বভাবমত অনুভূমিক ভাবে আর থাকে না। কাঁটার যে দিক উত্তর অভিমুখী দেখা যাইবে—তাহা শুধু যে উত্তর অভিমুখী দেখায় তাহা নহে, কিছুটা নিম্নে-হেলান হয়, ফলে একটি কোণের সৃষ্টি হয়, ইহাকে magnetic dip বলে, এই চম্বুক হেলানও এক এক স্থানের এক এক রকম। একেবারে উত্তর-চম্বুক-অক্ষে (North magnetic pole) কাঁটা সম্পূর্ণ লম্ব হইয়া থাকে—এখানকার চম্বুক-হেলান ৯০°।

যদি কাঁটার নিকট ধাতব পদার্থ থাকে, বিশেষত লোহা বা ইস্পাত জাতীয় জিনিষ পত্তর থাকে, দেখা যায়, তাহা হইলে কাঁটার দিক নির্ণয় করার হেরফের ঘটে। বিমান চালকের এ সকল কথা ভাবিয়া

চিন্তিয়া দেখিতে হইবে; বিমান চালককে চম্বুক-টানের আনত বিষয়ের পত্র কোষ্ঠি খানিকে নিকটে রাখিতে হয়। এই পত্র কোষ্ঠী দেখিয়া কম্পাসের সাহায্যে উহাদের পথের দিক-পাত স্থির করিতে হয়। নির্দিষ্ট পথে বিমান চালনার জন্য গ্রহ নক্ষত্রও অনেক সময় ধরতব্যের মধ্যে আসে।

সংজ্ঞা—নিম্নে কতক বিষয়ের সংজ্ঞা নিরূপণ করা হইল।

বিমান বেগ (plane velocity)। এই সূত্রে বিমান বেগ কথাটি ব্যবহৃত হয় যে, বায়ু না থাকিলে নির্দিষ্ট তেল খরচায় বিমান যে বেগ উৎপন্ন করে।

গন্তব্য দিক (head)। যেদিকে বিমান উড়িয়া যাইতেছে তাহাকে গন্তব্যদিক অভিমুখ বলে।

ভূমি বেগ (Ground velocity) বিমানের যথার্থ বেগ। মাটিতে-ভূমিতে একটি নির্দিষ্ট লক্ষ্য এর তুলনায় বিমানের যথার্থ বেগ।

বায়ু-দিকবিধি (wind direction) যে দিক হইতে বায়ু বহিতেছে। যেমন পশ্চিমী হাওয়া পশ্চিম দিক হইতে পূর্বে যায়।

বায়ু-বেগ (wind velocity) ঘণ্টা হিসাবে বায়ুর বেগকে বলা হয়।

স্থান দিকবিধি (ground direction) যে দিকে বা যে স্থান অভিমুখে বিমান যায়।

আপেক্ষিক বেগ (Relative velocity) দুইটি বিমানের আপেক্ষিক বেগ অর্থাৎ হার বুঝায়, এই হারে দুইটি বিমানের মধ্যে যে বিরতি থাকে তাহার ক্রমান্বয় পরিবর্তন।

ড্রিফট এ্যাঙ্গেল (drift angle)। স্থান বা ভূমির সম্বন্ধে বিমানের গন্তব্য দিক (head) মিলিয়া যে কোণ তৈয়ারী হয় তাহাকে ড্রিফট এ্যাঙ্গেল কহে। অবশ্য উহা আদতে দিক এবং বায়ুবেগ দ্বারা স্থিরীকৃত হয়।

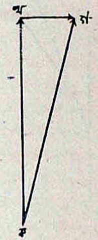
বেগ এবং দিক এই দুয়ের উপর বায়ু প্রভাব করে। স্থির বায়ুতে একটি বিমানের বেগ যদি ঘণ্টা প্রতি x মাইল হয় এবং বায়ুবেগ যদি ঘণ্টা প্রতি y মাইল হয়—তাহা হইলে বিমান যখন চলিবে তখন তাহার বেগ হইবে অর্থাৎ অনুকূল বায়ুর বেগ হইবে ঘণ্টা প্রতি $x+y$। বায়ু যখন প্রতিকূলে সেই বিমানেরই বেগ হইবে $x-y$। আবার বিমান যখন সোজাসুজি বায়ুর অনুকূলে বা প্রতিকূলে নহে তখন বিমানের বেগ ত্রিকোণমিতির দ্বারা স্থিরীকৃত হইবে। অথবা স্কেলে ফেলা নকশা হইতে তাহার মাপ হিসাব করিলে বুঝা যাইবে।

ভেক্টর (vector)। ভেক্টর গনিত শাস্ত্রমতে নিছক পরিমান, এই ভেক্টরের মানগুণ্য (magnitude) এবং দিক অভিমুখ নির্নীত থাকে। সাধারণত, ভেক্টরের ব্যাপার হিসাবে বেগ এবং জোর ধরা হয়। ভেক্টর চিহ্ন—একটি সরল রেখা যাহার এক দিকে তীর ফলক আঁকা তাহার দ্বারা ভেক্টর বুঝান হয়। এই সরল রেখার দৈর্ঘ্য ভেক্টরের মানগুণ্যের অনুযায়ী বা হিসাবে টানা হয়, এবং তীর মুখ উহার দিক নির্ণয় করে।

বেগ ভুজ (velocity-triangle)। নিম্নলিখিত সমস্যার সমাধানে বেগ-ভুজের ব্যবহার লিখিত হইল।

(১) একটি বিমান যদি উত্তর অভিমুখে যাত্রা করে, তাহার বেগ ঘণ্টায় ১২০ মাইল, এই সময় পশ্চিম হইতে বায়ুর বেগ ঘণ্টায় ৩০ মাইল। এখন, বিমানের সঠিক ভূমিগত বেগ, ড্রিফট এ্যাঙ্গেল এবং স্থান-দিক কি জানিতে হইবে।

একটি মাপকাঠি (scale) স্থির করা দরকার—যাহার ১" ইঞ্চিতে ৬০ মাইল ধরিতে হইবে। ক, খ, ২" ইঞ্চি দীর্ঘ, এই দুই ইঞ্চিতে বিমানের বেগ (velocity), মানগুণ্য ও দিক হিসাবে, ১২০ মাইল। খ, গ যাহা পূর্বাভিমুখী এবং ½" ইঞ্চি দীর্ঘ, উহা ৩০ মাইল ঘণ্টায় বায়ু-বেগ; ফলে ভেক্টর ক, গ, এই বেগ দুইটির ফল বা লব্ধ স্বরূপ, কোণ <খ, ক, গ ড্রিফট এ্যাঙ্গেল। যেহেতু ত্রিভুজটি সমকোণী তাই আমরা ত্রিকোণমিতির দ্বারা সমস্যাটির সমাধান করিতে পারি।



● একক ভেক্টরের গুণ, দুই বা ততোধিক অপরাপর মিলিত ভেক্টরের গুণের সমান, ইহাকে উহাদের ফল বা লব্ধ—resultant বলে। ফল বা লব্ধ বলিতে অপরাপর ভেক্টরের, sum, যোগফলও বুঝায়।

Tan ক $= \frac{৩০}{১২০} = \frac{১}{৪} =$ ·২৫০০

By table, ক = ১৪°২′ ইহা ড্রিফট এ্যাঙ্গেল।

স্থান-দিক ফলে উ ১৪°২′ পূ (১৪°২′)

যদি ক গ'র দৈর্ঘ্য বলা হয় x, $\frac{৩০}{x} = \sin$ ক

তাহা হইলে $x = \frac{৩০}{\sin ক} = \frac{৩০}{·২৪২৫} =$ ১২৩·৭

অতএব ভূমিগত বেগ ১২৩·৭ মাইল ঘণ্টায়।

যদি খ কোণ সমকোণী না হয় সে ক্ষেত্রে ত্রিকোণমিতির সমকোণী ত্রিভুজ দ্বারা প্রমাণ করিতে পারিব না; তখন, আমাদের মাপকাঠি ধরিয়া অর্থাৎ রুলার প্রোট্রাকটর দ্বারা সঠিক ভাবে নকশা করিতে হইবে। এবং মাপজোপ দ্বারা অজানিত অংশ নির্ণয় করিতে হইবে।

(২) একজন বিমান চালক উ ২০° পূ (২০°) অভিমুখে যাইতে চাহে। তাহার বিমান-বেগ ঘণ্টায় ১০০ মাইল; বায়ু—উ ৪০° প (৩২০°) দিকে ঘণ্টায় ২৫ মাইল বেগে বহিতেছে; এখন, বিমানের কোন অভিমুখ (heading) হইবে? উহার ভূমিগত বেগই বা কত?

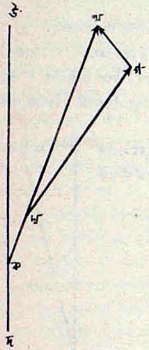
সমস্যাটি পাঠ করিয়া আমাদের সর্বাগ্রে একটি মাপ স্থির করা দরকার। মাপকাঠি ধরিয়া উহার ইঞ্চি প্রতি ৫০ মাইল হারে ধরিতে হইবে। ১" ইঞ্চি = ৫০ মাইল।

একটি সরলরেখা টানা যাক, ক হইতে খ এবং ইহার দিকপাত (bearing) উ ২০° পূ।

গ হইতে খ একটি ভেক্টর যাহা বায়ু-বেগ বুঝায়। ইহা (মনে রাখিব যে ১" = ৫০ মাইল) ½" ইঞ্চি লম্বা এবং উ ৪০° প অভিমুখে আছে।

এখন একটি কম্পাসের প্রয়োজন। প্রথমে, ২" ইঞ্চি দূরত্ব হিসাবে কম্পাসের, দুইটি বিন্দুর মাপ

ঠিক করা দরকার। এবং এই কম্পাসের এক দিক 'গ' তে রাখা যাক, এবং এইখানের কেন্দ্র হইতে ক, খ রেখাকে ছেদ করিয়া চাপ টানা যাক, সীমা হইল 'ঘ'।



ভেক্টর ঘ এবং গ হইল বিমানের বেগ। ভেক্টর ঘ খ হইল ভূমিগত বেগ, এবং গ ঘ খ হইল ড্রিফট এ্যাঙ্গেল। মাপ অনুযায়ী ∠গ ঘ খ প্রায় ১২°৩০′। ফলে দিকপাত রেখা (bearing of the line) ঘ গ হইল উ ৩২°৩০′ পূ (৩২°৩০′), ইহাই বিমানের অভিমুখ। সরল রেখা ঘ খ=২৩/৪″ দীর্ঘ, ফলে আমাদের মাপকাঠি অনুযায়ী ১১১ মাইল—ইহাই ভূমিগত বেগ।

১। একটি বিমানের বেগ ঘণ্টায় ১১০ মাইল; বায়ু-বেগ ঘণ্টায় ২৫ মাইল, ইহারই অনুকূলে বিমান যাইতেছে। ভূমিগত বেগ কত?

উপরোক্ত উদাহরণের বিমানের ভূমিগত বেগ কত হইবে, যদি ঘণ্টায় ৪০ মাইল বায়ুবেগের প্রতিকূলে যায়?

২। একটি বিমান পশ্চিম দিকে ঘণ্টায় ১৫০ মাইল বেগে চলে উত্তর হইতে বায়ুবেগ ঘণ্টায় ৪০ মাইল, বিমানের ভূমিগত বেগ কত এবং স্থান-দিক, ড্রিফট এ্যাঙ্গেল নির্ণয় কর?

৩। একজন বিমান চালক দক্ষিণে যাইতে চাহে, এবং বিমান বেগ ঘণ্টায় ১০০ মাইল, বায়ুবেগ ঘণ্টায় ৩০ মাইল এবং এই বায়ুবেগ বিমানের দক্ষিণ দিক হইতে বিমানের মুখের সহিত সরাসরি একটি সমকোণ সৃষ্টি করিয়া বহিতেছে। এখন, চালক কোন দিক অভিমুখে বিমান ঘুরাইবে?

৪। একটি বিমান দ ১৮° প (১৯৮°) অভিমুখে যায়, বিমান বেগ ঘণ্টায় ১৬০ মাইল। বায়ুবেগ ঘণ্টায় ৩৬ মাইল, ইহার দিক—দ ৪০° পূ (১৪০°) এখন ইহার ড্রিফট এ্যাঙ্গেল, মানগুণ্য ও দিক ফল (magnitude ও direction of the resultant) নির্ণয় কর?

৫। দুটি বিমান ক এবং খ—এক স্থান হইতে একই সময়ে যাত্রা করে, ক ঘণ্টায় ৮০ মাইল এবং খ ঘণ্টায় ১৩০ মাইল বেগে যায়। এখন ক এর অনুপাতে খ এর আপেক্ষিক বেগ নির্ণয় কর?

৬। বিমানবাহী একটি জাহাজ (aircraft carrier) পূর্ব অভিমুখে ঘণ্টায় ২০ মাইল বেগে চলে, এই বিমানবাহী হইতে একখানি বিমান উড়িয়া গেল, এবং বিমানটি পশ্চিম অভিমুখে ঘণ্টায় ১৬০ মাইল বেগে যায়। এই বিমান ও আদত বিমানবাহীর মধ্যে আপেক্ষিক বেগ নির্ণয় কর?

৭। দুইটি বিমান 'ক' নামক স্থান একই সময় ত্যাগ করে, দুইটি বিমান একটি সমকোণ সৃষ্টি করিয়া চলিতে সুরু করিল, একে অন্যের ঠিক সমকোণে সকল সময়ই আছে; একটির বেগ ঘণ্টায় ১০০ মাইল, এবং অন্যটির ১৩০ মাইল। উহাদের আপেক্ষিক বেগ কত? (পিথগোরাসের উপপাদ্য ব্যবহার কর)।

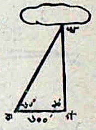
মাপকাঠির দ্বারা নিম্নলিখিত সমস্যার সমাধান কর।

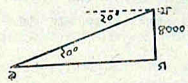
নির্ণয়-স্থল (observation point) 'ক' হইতে একটি কামান 'ঘ' এর দিকপাত (bearing) উ ১৮° পূ, অন্য আর একটি নির্ণয় স্থল 'খ' এবং এই স্থল—'ক' হইতে সরাসরি ১০০ গজ পূর্বে অবস্থিত এবং এই স্থল—অর্থাৎ খ—হইতে 'ঘ' এর দিকপাত উ ১০° প। এখন ঘ হইতে ক এর দূরত্ব কত?

একটি বিমান কোন সোজা রেল পথের ঠিক ১০০° ফুট উর্ধ্বে যায়, রেল গাড়ীর খানিক পিছনে বিমানটি ছিল। বিমান হইতে দেখা গেল রেলগাড়ীর সামনের দিক প্রায় ১৮° কোণ-কাতে (angle of depression) নামিয়া গিয়াছে। রেলগাড়ীর পশ্চাতভাগ প্রায় ৬১° কোণ-কাতে, নামিয়া গিয়াছে। এখন, রেলগাড়ীটি কত বড় ছিল?

ত্রিকোণমিতির দ্বারা সমাধান কর।

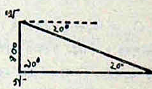
গ হইতে ক ৬০০ ফুট, এবং গ কোণটি সমকোণী, আর ক কোণ=৬০°, ক স্থলে একটি সার্চলাইট বসান আছে এবং যাহা 'খ' স্থানে অর্থাৎ যেখানে মেঘ সেখানে আলো ফেলিবে। গ ঐ মেঘের সরাসরি নীচে আছে এখন খ গ এর উচ্চতা নির্ণয় কর।

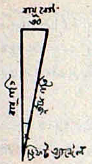




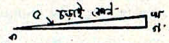
'খ' একটি বেলুন, দূরে—শহর 'ক', বেলুন হইতে ২০° কোণ-কাত নামিয়াছে—যদি বেলুনটি ৪০০০° ফুট উচ্চে থাকে এবং ধরা যাক্ খ বিন্দু অর্থাৎ বেলুনের সরাসরি নীচে যাহা 'গ'৯০° তে আছে, এখন ক হইতে গ এর দূরত্ব কত?

একজন পাহাড়ের উপর, ৪০০ ফুট, হইতে ক জাহাজকে দেখিল। কোণ-কাত ∠খ ক গ ২০°, গ যদি ৯০° হয় তাহা হইলে জাহাজ 'ক' হইতে গ এর দূরত্ব কত?

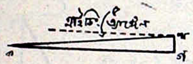




একটি বিমান ঘণ্টায় ১৫০ মাইল উত্তর অভিমুখে যায়। বায়ু ঘণ্টায় ৩০ মাইল বেগে পূর্বমুখে বহে। বায়ুর হের ফের নাই, ড্রিফট এ্যাঙ্গেল কত ?



যদি একটি বিমান ৫° কোণ ধরিয়া ঘণ্টায় ৬০ মাইল চলে, তাহা হইলে ২০ মিনিটে কতটা উচ্চে যাইবে অর্থাৎ গ, হইতে খ এর উচ্চতা কত ?



যদি গ্লাইডিং কোণ ৫° হয়, সেক্ষেত্রে ২০০০ ফুট উচ্চতা হইতে বিমানটি কত দূর পর্য্যন্ত (ক ও গ) ভূমির উপরে গ্লাইড করিবে ?

একটি বিমান ‘ক’ হইতে ঘণ্টায় ১০০ মাইল পূর্ব অভিমুখে যায় (ক, গ) এবং পরে, উত্তর অভিমুখে ঘণ্টায় ৫০ মাইল বেগে যায় (গ, খ) সেক্ষেত্রে খ ক গ এর কোণ অর্থাৎ ক হইতে বিমানের দিকপাত কত হইবে ?

ভ্রমণ চক্র (the cruising radius)। যখন একটি বিমান তাহার নির্দিষ্ট স্থান ত্যাগ করিয়া ভ্রমণ শেষে পুনরায় সেই স্থানে তৈল না লইয়া (অর্থাৎ একবার তেল লইয়াই) ফিরিয়া আসে তাহাকে ভ্রমণ চক্র বলে।

ইহা একটি ফরমূলায় নির্ণীত হয়।

$$R=\left(\frac{G_1G_2}{G_1+G_2}\right)T$$

G_1 ও G_2 – ভূমিগত বেগ। G_1 বিমানের বহির্মুখী যাত্রার ও G_2 প্রত্যাগমনের ভূমিগত বেগ বুঝায় T=সময়। বিমান যতক্ষণ আকাশে থাকিতে পারে T তাহার সময়। অবশ্য কতটা তেল আছে সেই অনুপাতে T আগেই ঠিক করা হয়।

সূত্রটি নিম্নলিখিত উপায়ে সূত্রপাত করা যায় :

x=বহির্মুখী ভ্রমণের সময় বা ঘণ্টা। এবং $T-x$=প্রত্যাগমন সময় বা ঘণ্টা

অতএব

$$G_1x=G_2(T-x)$$
$$G_1x=G_2T-G_2x$$
$$G_1x+G_2x=G_2T$$
$$(G_1+G_2)x=G_2T$$
$$x=\frac{G_2T}{(G_1+G_2)}$$

অতএব $$R=G_1x=\left(\frac{G_1G_2}{G_1+G_2}\right)T$$

[Elementary Algebra : Edward I Edgerton & Perry. A. Carpenter হইতে অনূদিত।]

রামানুজ ও হার্ডি

ত্রিশ বৎসর বয়সে রামানুজ যখন সাংঘাতিক ভাবে অসুস্থ হইয়া পড়েন। সেই সময়ে লণ্ডন হাসপাতালে তাঁহার সহিত দেখা করিতে আসেন তাঁহারই এক শুভার্থী কেম্ব্রিজ বিশ্ববিদ্যালয়ের বিখ্যাত অধ্যাপক জি, এইচ, হার্ডি।

হার্ডি সেই সময়ে কোন অঙ্কের সিদ্ধান্ত লইয়া ব্যস্ত ছিলেন। রামানুজকে আনন্দ দিবার জন্য তিনি বলিলেন, “আজ আমি একটা ট্যাক্সি চড়লাম যার নম্বরটা খুব নীরস—১৭২৯”

রামানুজ তৎক্ষণাৎ বলিলেন, “আমার ত মনে হয় যে এইটাই সবচেয়ে মজার সংখ্যা। কারণ এইটাই একমাত্র সংখ্যা যাকে দুইটি সংখ্যার ঘনফলের (cube) সমন্বয়ে দুই ভাবে সমাধান করা যায়।”

$$১৭২৯=৯^৩+১০^৩=১^৩+১২^৩$$

—collected papers of Srinivasa Ramanujan. by G. H. Hardy & Sesha Aiyar (1927)

ন্যায়তত্ত্ব

ভারতীয় চিন্তায় জ্ঞানের কথা আত্যন্তিকভাবে পারমার্থিক তত্ত্বের সহিত জড়িত। তত্ত্বার্থ আবার আত্মজ্ঞানেই একমাত্র প্রতিষ্ঠিত হয়। আত্মজ্ঞান নিরন্তর শ্রবণ, মনন ও নিদিধ্যাসনের বিষয়। তবু, বিচার জ্ঞানের আদ্যন্ত সমস্ত স্তরেই উপস্থিত থাকে, যেহেতু, বিচারেই নিত্যানিত্য বস্তুবিবেক জানা যায় এবং আত্মজ্ঞানের বিষয়ীভূত হইয়া জিজ্ঞাসুকে সচেতন করে। (নিত্যানিত্যবস্তুবিবেক কার্যত ভগবান শঙ্করাচার্য কথিত পারমার্থিক প্রসঙ্গ কিন্তু নিত্যানিত্য জ্ঞান আন্বীক্ষিকীতেই উদ্ভাসিত হয়। নিত্য হইতে অনিত্য তুষ হইতে খোসার ন্যায় ঝরিয়া পড়িলেই মুমুক্ষু আত্মসচেতনতায় মণ্ডিত হয়। আত্মসচেতনতা তাই প্রাথমিক ভাবে জ্ঞানের বিষয়ীভূত এবং জ্ঞান বস্তুবিচারে একান্তভাবে তদ্গত। অর্থাৎ জ্ঞান একাধারে বস্তুর জ্ঞান এবং আত্ম বিষয়ে সচেতনতা।)

ভারতীয় শাস্ত্রে, জাগতিক ইহলৌকিক সংবাদ ও বিসম্বাদ জ্ঞানের আলোচ্য। কারণ, ইহলোকেই বস্তুর অনতিক্রম্য সংস্পর্শ আমাদিগকে ঘিরিয়া থাকে এবং যেহেতু আত্মগত ব্যক্তি নিছক আত্মবোধের কারণেই তদ্গত হয়, বস্তুর সহিত চৈতন্যের কোনো দুর্লঙ্ঘ্য ব্যবধান নাই। বরং বস্তু ও চৈতন্যের সীমারেখা ভারতীয় চিন্তায় কোনো চিরস্থায়ী চীনের প্রাচীর নির্মাণ করে না। বস্তুর নিজস্ব জগতেই মূল্যের প্রশ্ন উত্থাপন করা হইয়াছে এবং সচেতন ব্যক্তি মাত্রই জানেন যে, বস্তু সচেতন ব্যক্তির নিকট যথার্থ ভাবেই উপস্থিত থাকে। প্রয়োজনের বাহিরে তাহা অনাবশ্যক, অযথার্থ এবং তাৎপর্যহীন। একমাত্র আত্মরতি হইতে মুক্তি পাইবার জন্য বের্গসনীয় এমন কোনো অভিজ্ঞানের প্রয়োজন করে না যাহাতে বস্তু কেবলমাত্র স্থানবদ্ধতায় (spatiality) বুদ্ধির চক্র এবং লীলা।

সম্বাদ ও বিসম্বাদের প্রসঙ্গ সম্পূর্ণত বিচারের এলাকাধীন। বিচার নিজস্ব কারণেই আবার ইন্দ্রিয়-গ্রাহ্য, প্রত্যক্ষ, জগতবিষয়ক অভিজ্ঞতায় নিষিক্ত। সুতরাং ন্যায়দর্শনের অনু ইক্ষণ অহেতুক নয়। যদিও নিত্যানিত্যবস্তুবিবেক প্রসঙ্গ বেদান্তেই শোভন ও সমীচীন, যেহেতু প্রমা আলোচনাই গৌতম-ন্যায়ের মুখ্য উদ্দেশ্য। প্রমার সহিত প্রমাণের যোগ, প্রমাণ প্রমার করণ স্বরূপ। প্রমা বলিতে যথার্থে (valid) জ্ঞান বোঝায়। প্রমার ক্ষেত্রে 'করণ' বলিয়া একটি শব্দ ব্যবহৃত হয়। করণের অর্থ 'যা করে' অর্থাৎ যাহা কোনো কিছু ঘটায়। সুতরাং যাহা প্রমাকে প্রতিষ্ঠিত করে, যাহা সত্যজ্ঞানকে সার্থক করে তাহাকে প্রমাণ বলা হয়। প্রমাণের প্রসঙ্গ ও প্রকরণের প্রশ্ন জড়িত অর্থাৎ প্রমার অবাধিত ও অনধিগম্যত্ব চরিত্র প্রতিষ্ঠায় জিজ্ঞাসু পথেরই সন্ধান করে। 'অবাধিত' অর্থাৎ যাহা বাধিত হয় নাই। জ্ঞানের বাধাই বাধিত করে। যেমন দড়িকে সাপ মনে করিলে যথার্থ জ্ঞান হয় না। আলোতে দড়িকে দড়ি বলিয়া চেনা যায়। এখানে দড়ির সর্প-চরিত্র বাধা পায় সুতরাং তাহা বাধিত (contra-dicted)। 'অনধিগম্যত্ব' বলিতে যাহা 'অধিগম্য' নয় বোঝায়। অধিগম্যের অর্থ পূর্বজ্ঞাত। ভারতীয় জ্ঞানীরা বলেন তাহাই জ্ঞান যাহা নূতন, যাহা পূর্বে জানা যায় নাই। এ-কারণেই তাঁহারা 'স্মৃতি'কে (memory) জ্ঞান বলেন না যেহেতু, স্মৃতি পূর্বে জ্ঞাত জ্ঞানের পুনরাবৃত্তি (repetition) মাত্র।

প্রমা বা নিশ্চিত জ্ঞান, অপ্রমা বা অযথার্থ জ্ঞান—ভারতীয় তত্ত্বে সর্বত্র স্বীকৃত। পাশ্চাত্য বক্তব্য অনুযায়ী জ্ঞান বস্তুত সর্বদাই নিশ্চিত ও যথার্থ। ভারতীয় মতে বাধিত বক্তব্য সাধারণ লোকশ্রুতি অনুযায়ী জ্ঞানপদবাচ্য নয় ; কিন্তু বিদ্বজ্জনমতে বাধিত বক্তব্য ও রজ্জুতে সর্প ভ্রমের ন্যায় ক্ষণকালীন সত্যের রূপ গ্রহণ করিতে পারে। কাজেই তাৎক্ষণিক সর্প যেমন পদস্খলনের কারণ হইতে পারে, মিথ্যা জ্ঞানকে জ্ঞান নামকরণ করিতে আপত্তি থাকেনা। প্রত্যেক ব্যক্তিই অবশ্য জানিবেন যে জ্ঞানের নিশ্চিতিতেই জ্ঞানের যথার্থ্য প্রমাণিত এবং স্বীকৃত হয়। প্রমাসিদ্ধির জন্য প্রমাণ, ভারতীয় শাস্ত্রে, নানাবিধ। ন্যায়দর্শনে চতুর্বিধ প্রমাণ স্বীকৃত হইলেও অনুমানখণ্ডের আলোচনাই মূল। প্রত্যক্ষে জ্ঞানের সীমাবদ্ধতা থাকে, অনুমান প্রত্যক্ষের অব্যবহিত চরিত্রকে মুক্তি দেয়। ফলে, জ্ঞান সহজেই সার্বজনীনতা পাইতে পারে। ন্যায় দর্শনের প্রধান আলোচ্য এই অনুমান বস্তুত কিন্তু প্রত্যক্ষের সম্পর্কহীন নয়, প্রত্যক্ষের ভিত্তিতেই ন্যায়ের অনুমান আলোচনায় স্বীকৃত হয়।

অনুমান অর্থাৎ পশ্চাৎভাবনা নিরালম্ব নহে। 'অনু' অর্থে পশ্চাৎ ও 'মান' অর্থে ধারণা বোঝায়। কাজেই অনুমানের অর্থ একটি ভাবনার পরবর্তী ভাবনা। পশ্চাতের ভাবনা নিঃসন্দেহেই পূর্বভাবনার আশ্রিত। বর্তমানে নিবদ্ধ পশ্চাৎভাবনা—অভিজ্ঞতার অন্তর্নিহিত সূত্রগুলিকে অলক্ষ্যে সম্পর্কিত করে। যেমন, বর্তমানে ধূমের কারণে পর্বতে অপ্রত্যক্ষ অগ্নির উপস্থিতি ঘোষণা করা হইতেছে। অনুমানে অগ্র-পশ্চাত বিবেচনায় জ্ঞান হইতে অজ্ঞাত সম্পর্ক ও সত্য প্রতিষ্ঠা করাই লক্ষ্য থাকে। জ্ঞাত হইতে অজ্ঞাত চরিত্রের প্রতিষ্ঠাতেই জ্ঞানের অনধিগম্যত্ব অর্থাৎ নতুনত্ব প্রকাশিত হয়। নির্দিষ্ট যে পর্বতটি বিষয়ে সিদ্ধান্ত করা হইয়াছে তাহা ইতিপূর্বে জ্ঞানের গোচরে ছিল না ; কিন্তু বর্তমান ধূমের প্রত্যক্ষ পর্বতটিকে পূর্বেকার অভিজ্ঞতালব্ধ জ্ঞানে সন্নিধিতে উপস্থিত করে এবং আমরা নিশ্চিন্তে জ্ঞানের বিস্তার করি। আলোচ্য উদাহরণে প্রত্যক্ষ ধূম হইতে অপ্রত্যক্ষ অগ্নি বিষয়ে সিদ্ধান্ত করা হইয়াছে। পূর্বে আমি নিশ্চয়ই ধূম ও অগ্নির যোগ লক্ষ্য করিয়াছি তাই অচেনা পর্বতে ধূম দেখিয়া এখন বলিলাম যে পর্বতে আগুন লাগিয়াছে। প্রত্যক্ষ হইতে অপ্রত্যক্ষে গমন করিবার প্রক্রিয়া এবং ফল উভয়কেই অনুমান বলা হয়।

অনুমান প্রসঙ্গে ন্যায়দর্শনে দুইটি প্রশ্ন মীমাংসা করা দরকার। প্রথমত, কেমন করিয়া অনুমান সম্ভব হয় অর্থাৎ প্রত্যক্ষ হইতে অপ্রত্যক্ষে চলা সম্ভব হয় এবং দ্বিতীয়ত, অনুমানের নিশ্চিতি বা নিশ্চয় ধারণা কাহার উপর নির্ভর করে। ন্যায়দর্শন প্রশ্ন দুইটির সমাধান উপস্থিত করিয়াছে। প্রথম প্রশ্নের উত্তরে ন্যায়দর্শন ঘোষণা করে যে, লিঙ্গ ও সাধ্যের ব্যাপ্তিসম্বন্ধে প্রত্যক্ষ অপ্রত্যক্ষকে সংযুক্ত করে। দ্বিতীয় প্রশ্নের নিরসন হয় ব্যাপ্তিগ্রহের প্রতিষ্ঠায়। ব্যাপ্তিগ্রহের লক্ষ্য লিঙ্গ ও সাধ্যের নিয়ত সম্বন্ধ প্রতিষ্ঠা করা। লিঙ্গ ও সাধ্যের নিয়ত সম্বন্ধ অনুমানের ভিত্তি কারণ কোনো একটি দৃষ্টান্তে লিঙ্গ ও সাধ্য সম্পর্কিত থাকিতে পারে কিন্তু তাহারা নিয়তই যে, সম্পর্কিত থাকিবে এমন নহে। একবার ধূম ও অগ্নির সহাবস্থান প্রত্যক্ষ করিয়াছি বা বহুবার করিয়াছি কিন্তু সমস্ত দেশেকালেই যে ধূম ও অগ্নি সহগমন করে—এমন প্রমাণ নাই। কাজেই ধূমরূপ

লিঙ্গ দর্শনে পর্বতে অগ্নিরূপ সাধ্যের উপস্থিতি ঘোষণা, সত্যও হইতে পারে মিথ্যাও হইতে পারে। কিন্তু ধূম ও অগ্নির সহগামিতা যদি পূর্বেই প্রতিষ্ঠা করা যায় তবে নির্দ্বিধায় যেমন সর্বত্র ধূমপ্রত্যক্ষে অগ্নির উপস্থিতি ঘোষণা করা সম্ভব, তেমনি সিদ্ধান্তের অনিবার্য নিশ্চিতিও বিনা দ্বিধায় পাওয়া যায়। ব্যাপ্তিগ্রহ এই নিশ্চিতির সাধনসামগ্রী।

ব্যাপ্তিগ্রহ প্রতিষ্ঠার উপায় সম্বন্ধে ষড়দর্শনের ঋষিরা একমত নহেন। আমরাও এই মতান্তর বিষয়ে আলোচনা করিব না। এখন সাধ্য ও লিঙ্গের সম্পর্ক প্রতিপন্ন করাই আমাদের উদ্দেশ্য। ন্যায়দর্শন অনুযায়ী, অনুমান জ্ঞানের পশ্চাদ্‌ভাবী জ্ঞান অর্থাৎ একটি জ্ঞানের পর অন্য একটি জ্ঞান সম্ভব হইলেই তাহা পূর্ববর্তীর সূত্রে আসিতে পারে। অনুমিতিস্থলে আদিতে লিঙ্গ দর্শন হয়, তৎপরে লিঙ্গ-লিঙ্গীর সম্বন্ধজ্ঞান (ব্যাপ্তিজ্ঞান) হয় এবং পরিশেষে অপ্রত্যক্ষ সাধ্যর জ্ঞান হয়। সাধ্যের জ্ঞানই অনুমিতি। লিঙ্গ দর্শনের অব্যবহিত পরে বা লিঙ্গ দর্শনের সূত্রে ব্যাপ্তিজ্ঞানদ্বারা অনুমিতি প্রতিষ্ঠিত হওয়ায় ব্যাপ্তিজ্ঞানকে অনুমানের করণ বা প্রমাণ বলা হয়। যেমন 'দূরস্থ পর্বত বহ্নিমান্, কারণ ইহা ধূমবান' এই দৃষ্টান্তে পর্বতস্থ বহ্নি প্রত্যক্ষগোচর নহে। কিন্তু পর্বতে ধূমের প্রত্যক্ষ হওয়ায় ধূম ও অগ্নির নিয়ত সম্বন্ধ স্মরণে আসে। তদ্দ্বারা অপ্রত্যক্ষ বহ্নির অনুমান হয়। এস্থলে ধূম লিঙ্গ, হেতু বা চিহ্ন, অগ্নি সাধ্য এবং ধূম ও বহ্নির নিয়ত সম্বন্ধ হইতেছে ব্যাপ্তি।

ন্যায়দর্শনে অনুমান বিন্যাসবদ্ধ থাকে। এই বিন্যাসটিকেও ন্যায় বলা হয়। আমাদের অর্থে ন্যায় একটি যুক্তিক্রম। তাহার পূর্বাপর সম্পর্ক আছে এবং সম্পর্কের অন্তঃসঙ্গতিতে তাহা অনিবার্য ভাবে একটি প্রতিজ্ঞা হইতে অন্য প্রতিজ্ঞায় অগ্রসর হয়। ন্যায়ের যুক্তিক্রমটিকে বিশ্লেষণ করিলে প্রথমত পাওয়া যাইবে তাহার তিনটি অঙ্গ—তিনটি পদ। পদ তিনটির নাম সাধ্য, পক্ষ এবং লিঙ্গ। লিঙ্গ হইতেছে চিহ্ন, যাহার উপস্থিতির জন্য অন্যান্য প্রসঙ্গ উত্থাপিত হয়। যেমন, ধূমরূপ লিঙ্গ দর্শনে পর্বতে অপ্রত্যক্ষ অগ্নির কথা স্মরণে আসে। দৃষ্টান্তে পর্বত অগ্নির আশ্রয় হওয়ায় পর্বত 'পক্ষ'। ধূমহেতু পর্বতে অগ্নির উপস্থিতিই যেহেতু আলোচ্য অগ্নি 'সাধ্য' নামে পরিচিত। অনুমানের ন্যায়ে লিঙ্গ সাধ্য ও পক্ষের মধ্যে সম্পর্ক স্থাপন করে। যেমন, ধূমহেতু পর্বতে (পক্ষ) অগ্নি (সাধ্য)র অনুমান সম্ভব হইয়াছে।

অনুমানে অন্তত তিনটি প্রতিজ্ঞা থাকে। প্রচলিত ধারণা অনুযায়ী প্রথমত পক্ষে (পর্বতে) লিঙ্গ (ধূম) দর্শন হয়; দ্বিতীয়ত, লিঙ্গ বা হেতুর সহিত সাধ্যের (অগ্নির) সম্বন্ধজ্ঞান হয়। কিন্তু যুক্তির বিন্যাস অনুযায়ী অনুমানকে প্রথমত পক্ষে সাধ্যের নির্দেশ দেওয়া হয়, যেমন 'পর্বত বহ্নিমান্'। পরে আর একটি প্রতিজ্ঞায় হেতুকে পক্ষের ধর্মস্বরূপ উপস্থিত করা হয়; যেমন, 'যেহেতু পর্বত ধূমবান্।' পরিশেষে হেতু ও সাধ্যের ব্যাপ্তিসম্বন্ধকে ঘোষণা করা হয়—'ধূম বহ্নিব্যাপ্ত' অর্থাৎ যেখানেই ধূম আছে সেখানেই বহ্নি আছে।'

ব্যাপ্তিসম্বন্ধে সাধ্য অগ্নি ব্যাপক এবং হেতু ধূম ব্যাপ্য। ব্যাপ্য ব্যাপক সম্পর্কই যদিও অনুমানের

ভিত্তি তবু হেতু ও সাধ্যে ব্যাপ্তির মাত্রাভেদ ঘটিতে পারে। যেমন, আলোচ্য উদাহরণে সাধ্য অগ্নি হেতু ধূমকে ব্যাপিয়া আছে কিন্তু অগ্নিকে ধূম ব্যাপিয়া নাই। কারণ ধূমহীন অগ্নি (যেমন বৈদ্যুতিক আগুন) সম্ভব কিন্তু আগুনহীন ধূম সম্ভব নয়। অনুমানের ক্ষেত্রে তাই তিনটি পদ ও তিনটি প্রতিজ্ঞা পাওয়া যাইতেছে। এই তিনটি প্রতিজ্ঞা ও তিনটি পদকে নৈয়ায়িকরা বিস্তৃত করিয়া পাঁচটি প্রতিজ্ঞা অবয়বে বিভক্ত করেন। ইহাকে পঞ্চাবয়বী ন্যায় বলা হয়। বর্তমান উদাহরণটিকে ন্যায়ে বিশ্লেষিত করিলে হইবে—

(১) পর্বতটি বহ্নিমান (প্রতিজ্ঞা)
(২) কারণ ইহা ধূমবান (হেতু)
(৩) যেখানেই ধূম সেখানেই বহ্নি, যেমন মহানস (প্রজ্জ্বলিত চুল্লী)
(৪) পর্বতটিও সেইরূপ ধূমবান (উপনয়)
(৫) অতএব ইহা বহ্নিমান (নিগমন)

অনুমান দুই প্রকার। বিষয়ী নিজস্ব প্রয়োজনে স্বীকৃত বক্তব্য হইতে নূতন সিদ্ধান্ত করিলে বলা হয় স্বার্থানুমান। স্বার্থানুমানে পঞ্চাবয়বের প্রয়োজন নাই যেহেতু বিষয়ী স্বয়ং বিচারক্রিয়াটি গঠন করেন। সেই একই সিদ্ধান্ত অপর ব্যক্তিদের গ্রহণ করাইতে হইলে প্রস্তাবিত বক্তব্যটিকে সম্পূর্ণ প্রকাশ করিতে হয়। ন্যায়ের পঞ্চাবয়বী সংগঠন পরার্থানুমান অর্থাৎ অপরের জ্ঞানের প্রয়োজনে গঠিত।
পঞ্চাবয়বী ন্যায়ে লক্ষ্য করিবার বিষয় হইল ১ নং প্রতিজ্ঞাটি ও ৫ নং প্রতিজ্ঞাটি : সম্পূর্ণ এক। কার্যত তাই ন্যায় চারিটি প্রতিজ্ঞায় গঠিত। এই ঐক্য সত্ত্বেও ইহাদের তাৎপর্য পৃথক। প্রথম প্রতিজ্ঞাটি বক্তার নিশ্চয়াত্মক বক্তব্য নহে, অন্যান্য অনেক ধারণার একটি মাত্র। কিন্তু লিঙ্গ দর্শনে পক্ষ ও সাধ্যের সম্পর্ক স্থাপিত হইলে একটি অনিবার্য নিগমন প্রস্তুত হয়। নিগমনটিই সিদ্ধান্ত বা প্রতিজ্ঞা। কিন্তু বর্তমানে নিগমনটি আর ১ নং প্রতিজ্ঞার ন্যায় অনিশ্চিত নহে। নিগমনটি একটি নিশ্চিত এবং অনিবার্য সিদ্ধান্ত।

পঞ্চাবয়বী ন্যায়ে ৩নং প্রতিজ্ঞাটি উল্লেখযোগ্য কারণ ইহা আরোহ ও অবরোহের সমন্বয়। অবরোহী ন্যায়ে সামান্য প্রতিজ্ঞা হইতে হেতুর সাহায্যে স্বল্পব্যাপক একটি সিদ্ধান্ত গঠন করা হয়। এই প্রক্রিয়ায় অন্তঃসঙ্গতিই একমাত্র ভিত্তি, বাস্তব জগতের নিয়ম ও কার্যকারিতা তাহার লক্ষ্য নয়। কিন্তু ন্যায় দর্শনে যদিও অন্তঃসঙ্গতিপূর্ণ ন্যায়ের কথা বলা হইয়াছে, এই ন্যায়ে একটি প্রকৃত উদাহরণের প্রয়োজন হয়। কারণ আরোহের কার্যকরী উদাহরণের ন্যায় প্রজ্জ্বলিত চুল্লীও একটি সামান্য নিয়ম জ্ঞাপক উদাহরণ।

—শান্তি বসু

৫

সংখ্যাতত্ত্বের সূচনা

সংখ্যাই গণিতশাস্ত্রে মূল ; এবং আমরা এই প্রবন্ধে ঐ সংখ্যার সঠিক তত্ত্বের প্রয়োজনীয় ধর্ম সম্বন্ধে আলোচনা করিব। অবশ্য এখনই আমরা এই বিষয়ে বিশদ আলোচনা অর্থাৎ প্রত্যেক স্তর বিষয় পুঙ্খানুপুঙ্খরূপে নির্ণয় করিব না ; উহা উচ্চতর অঙ্কশাস্ত্রের কথা। তাই এখন শুধুমাত্র আমরা উহার প্রাথমিক দিকই আলোচনা করিব।

আমাদের অল্পবয়সে, স্কুলে, সংখ্যা সম্বন্ধে ধারণা কিভাবে গড়িয়া তোলা হয় তাহা সংক্ষেপে বিচার করা যাক। ছোটবেলাতেই আমরা সর্বপ্রথম গণনা করিতে শিখি এবং এইভাবে আমাদের ১, ২, ৩, প্রভৃতি স্বাভাবিক সংখ্যার (natural number) সংগে পরিচয় ঘটে এবং ক্রমে ক্রমে এই স্বাভাবিক সংখ্যার নানান ব্যবহার বিধিনিষেধ স্কুলে শেখান হয়। প্রথমেই পাটিগণিত অনুযায়ী আমাদের শেখান হয় কি পদ্ধতিতে দুইটি স্বাভাবিক সংখ্যার যোগ, বিয়োগ, গুণ, ভাগ করা সম্ভবপর।

এই চারিটি বিভিন্ন পদ্ধতির মধ্যে 'ভাগ' লইয়া সর্বাগ্রে তর্ক শুরু হয়। দেখা যায়, এমন কতক সংখ্যা আছে যাহাকে সহজেই অন্য সংখ্যার দ্বারা ভাগ করা যায় যথা ৬ কে ২, এখানে ভাজ্য ও ভাজকের সম্পর্ক যুতসই ফলে ভাগ করা সম্ভব হয়।

কিন্তু দেখা গেল অনেক সংখ্যার ক্ষেত্রে ভাগ প্রক্রিয়া প্রযোজ্য নয়। অনেক সংখ্যা আছে যাহা সঠিক ভাবে বিভাজ্য নহে। যথা যদি ৯ কে ২ দিয়া ভাগ করিতে চাহি, ৭ কে ৩ দিয়া ভাগ করিতে চাহি এবং আরও জটিল মনে হইবে যদি ৩÷৫ দিয়া ভাগ করিতে ইচ্ছা করি যাহা পরে দেখিতে পাইব সত্যই একান্ত প্রয়োজনীয়।

৯ কে ২, ৭ কে ৩ এবং ৩ কে ৫ দিয়া যদি ভাগ করিতে হয় তাহা সাধারণ স্বাভাবিক সংখ্যার দ্বারা নির্ণয় করা অসম্ভব। ফলে এই প্রক্রিয়ার জন্য আমাদের সম্পূর্ণ নূতন সংখ্যার উদ্ভব করা প্রয়োজন হয়, যাহার সংগে কোন সূত্রে প্রথম সংখ্যার অর্থাৎ স্বাভাবিক সংখ্যার যোগ থাকিলেও উহা সম্পূর্ণরূপে আর এক প্রকৃতির। এই নূতন সংখ্যার নাম ভগ্নাংশ (Fraction) ; এবং পাটিগণিত অনুযায়ী আমাদের ভগ্নাংশ শেখান হয়।

ভগ্নাংশ বিষয়টি সম্পর্কে আমরা যাহারা পাটিগণিত অনুযায়ী প্রথম পরিচয় লাভ করি তাহারা সাধারন ঐ প্রক্রিয়া সম্পর্কে কোন বিশেষ গুরুত্ব আরোপ করিনা। অথচ এই ভগ্নাংশ অঙ্কশাস্ত্রের উন্নতির সর্বপ্রথম বলিষ্ঠ নাটকীয় পদক্ষেপ। এই ভগ্নাংশ অঙ্কশাস্ত্র চর্চার আদিতে দেখা যায় নানান অদ্ভুত নিয়মের মধ্যে সীমাবদ্ধ ছিল। ইহার ইতিহাসও বিরাট—তবু কথা প্রসঙ্গে এইটুকুই বলা যায়, ব্যাবিলোনীয়রা এই ভগ্নাংশ প্রক্রিয়া সম্ভবত শুরু করে। ব্যাবিলোনীয় অঙ্কবিদরা

সকল ক্ষেত্রেই অর্থাৎ যখনই ভগ্নাংশ ব্যবহার করিতেন তখনই দেখা যায় ৬০ সংখ্যাটি ভগ্নাংশের **হর** হিসাবে ধরিতেন।

যে সকল ভগ্নাংশের লবটি ১ নয়, মিশরীয়গণ তাহাদের **খণ্ড-ভগ্নাংশের** সাহায্যে প্রকাশ করিত। এই প্রকারের ভগ্নাংশগুলিকে ভাঙ্গিয়া তাহারা কতকগুলি খণ্ড-ভগ্নাংশে পরিণত করিত, যাহাদের প্রত্যেকের লবগুলি ১ হইত ও যাহাদের সমষ্টির মান মূল ভগ্নাংশটির মানের সমান হইত ; যেমন $\frac{২}{৫}$ এর পরিবর্তে $\frac{১}{৩}+\frac{১}{১৫}$ লেখা হইত। অনেককাল পরে দেখা যায় রোমকগণ ১২ সংখ্যাটি হর হিসাবে ধরিতেন।

অবশ্য ইদানীং কালে আমরা যে নিয়মে লিখি তাহা লিওনার্দো দ্য পিসা [ইনি ১৩শ শতাব্দীতে বিখ্যাত অঙ্কশাস্ত্রবিদ্ ফিবনোচ্চি (Fibonacci) নামেই অঙ্কশাস্ত্রে বিশেষ পরিচিত] কর্তৃক প্রচলিত। ফিবনোচ্চি লিখিত "লিবর আবেসি" ১২০২ খৃষ্টাব্দে প্রকাশিত হয়।

শূণ্য ঋণাত্মক (negative number) সংখ্যা

শূণ্য ও – ৭, – ৩, – ৪½, প্রভৃতি ঋনাত্মক সংখ্যার সঙ্গে, অর্থাৎ ইহাদের প্রকৃতি সম্পর্কে আমাদের বিশেষ পরিচয় প্রয়োজন। অর্থাৎ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা ও ঋনাত্মক সংখ্যার গণনার ধারাটা কি রূপের।

ধনাত্মক ও ঋনাত্মক সংখ্যা, শূন্য এবং ঋণাত্মক ও ধনাত্মক ভগ্নাংশ—এগুলিকে সমষ্টিগতভাবে বলা হয় মূলদ সংখ্যা (Rational number)। শুধুমাত্র ধনাত্মক স্বাভাবিক সংখ্যা হইতে এই মূলদ সংখ্যার কার্যকারিতার সুবিধাও আছে, আমরা নির্ভাবনায় যে কোন মূলদ সংখ্যা হইতে যে কোন মূলদ সংখ্যা বিয়োগ করিতে পারি।

যদি শুধুমাত্র ধনাত্মক সংখ্যা থাকে, তাহা হইলে ৩—৫ এই অঙ্কের কোন অর্থই হইত না। এখন একথা আমাদের জানা দরকার যে এই ঋণাত্মক সংখ্যার (negative number) স্থায়িভাবে গণিতশাস্ত্রে স্থান লাভ করিতে অনেকদিন সময় লাগিয়াছিল। যদিও অন্যান্য দেশে, যথা চীনদেশে, ভারতবর্ষে এবং আরবীয়রা ঋণাত্মক সংখ্যার ব্যবহার জানিতেন কিন্তু পাশ্চাত্যে সপ্তদশ শতাব্দী পর্যন্ত গণিতবিদ্‌রা এই ঋনাত্মক সংখ্যাকে ধনাত্মক সংখ্যার সমপর্যায়ভুক্ত করেন নাই।

যখন আমরা $\sqrt{২}$ অথবা π প্রভৃতি (অমূলদ সংখ্যা বা irrational number) রাশি বিচারের কথা বলি তখন আমরা দেখি এইগুলিকে কোন ক্রমেই সাধারণ ভগ্নাংশ হিসাবে লেখা যায় না। শুধুমাত্র আমরা উহাদের অসীম দশমিক (infinite decimal) হিসাবে প্রকাশ করিতে পারি যেমন $\sqrt{২}$ =১·৪১৪২···এবং π=৩·১৪১৫৯··· ··

মূল সংখ্যা প্রকাশেও অসীম দশমিক প্রয়োজন। যেমন,

$$\frac{১}{৪}=০·২৫০০০০···$$

$$\frac{১}{৩}=০·৩৩৩৩৩৩···$$

২=২·০০০০০০০....

১/৭=০·১৪২৮৫৭১৪২৮৫৭...

এইভাবে দেখা যায়, এগুলি কিছুদূর পর্যন্ত গিয়া পুনরাবৃত্ত হয়; কিন্তু অমূলদ সংখ্যাগুলি আদতে তাহা হয় না। এবং এই সমস্ত মূলদ ও অমূলদ সংখ্যাকে সমগ্রভাবে বলা হয়, বাস্তব সংখ্যা (real number)। বাস্তব সংখ্যার যথাযথ সংজ্ঞা নির্ণীত করা অর্থাৎ যে সংজ্ঞা একেবারে ত্রুটিহীন হইবে এমন সংজ্ঞা অভিহিত করা সত্যই সুকঠিন। তাই এই অর্থাৎ এই প্রবন্ধে আমরা নিছক অনুমান বা মনগড়া ধারণার উপর নির্ভর করিব। আমাদের বাস্তব সংখ্যা সম্পর্কে কাজ চলার মত ধারণা আছে এই বিশ্বাসে, এখন আমরা বাস্তব সংখ্যা লইয়া আলোচনা করিব।

বাস্তব সংখ্যার যোগ।

দুইটি বাস্তব সংখ্যার মধ্যে যোগ করার সংজ্ঞা নির্ধারিত আছে, যেমন ২+৩=৫, অথবা −৩+২½=−½ ইত্যাদি। এইভাবে দেখা যায়, প্রকৃতপক্ষে এক জোড়া বাস্তব সংখ্যার যোগফল হিসাবে তৃতীয় একটি বাস্তব সংখ্যা পাওয়া যায় বা সূচিত হয়। আমরা এই স্বভাবের অর্থাৎ ধর্মের নামকরণ করি ক্লোজার (closure) এবং সেই বলে আমরা নিম্নলিখিত নিয়ম স্থির করিতে পারি। যোগের ক্লোজার নিয়ম— a এবং b, দুইটি বাস্তব সংখ্যা, এই দুই এর যোগফল a+b তৃতীয় একটি বাস্তব সংখ্যা c।

এই বিষয় সম্পর্কে আমরা সকলেই অবহিত যে যোগ প্রক্রিয়া রাশিগুলির ক্রম সন্নিবেশের উপর নির্ভর করে না; যেমন ২+৪=৪+২, −৩+π=π+(−৩) ইত্যাদি। এই স্বাভাবিক ধর্মকে আমরা যোগের বিনিময় নিয়ম (commutative law) বলি, এবং নিম্নলিখিত ভাবে নিয়মটি লেখা যায়।

যোগের বিনিময় নিয়ম : a+b=b+a। কিন্তু ইহাতে তিনটি সংখ্যার যোগফল নির্ণয় করা শক্ত হয়, কেননা এখানে আমরা দুইটি সংখ্যার জন্য যে যোগফলের সংজ্ঞা দেওয়া হইয়াছে তাহাই মাত্র পাই—কিন্তু তিনটি সংখ্যার জন্য নহে।

সাধারণত আমরা ২+৪=৬ করি, তাহার পর ৬+৭=১৩ যোগ করি। কিন্তু যদি আমরা সর্বাগ্রে ৪+৭=১১ যোগ, তাহার পর ২+১১=১৩ করিতেও পারি ইহার আর এক অর্থ এই যে (২+৪)+৭=২+(৪+৭) এবং এইজন্য এই ধর্মকে আমরা যোগ প্রক্রিয়ার সংযোগ নিয়ম (associative law) বলিয়া অভিহিত করিতে পারি। নিম্নলিখিতভাবে আমরা নিয়মটি লিখিতে পারি—

যোগের সংযোগ নিয়ম : (a+b)+c=a+(b+c)

এখন প্রকৃতপক্ষে আমাদের তিনটি সংখ্যার যোগফল a+b+c ইহার সংজ্ঞা বিহিত করিতে হইবে, কারণ ইতিপূর্বে আমরা দুইটি সংখ্যার a+b এর যোগফলের সংজ্ঞা যে কি তাহা জানি। সুতরাং আমরা এই সংজ্ঞা দিই।

সংজ্ঞা—তিনটি সংখ্যার যোগফল a+b+c মানেই (a+b)+c

একটি উপপাদ্যের সাহায্যে এখন আমরা সহজেই প্রমাণ করিতে পারি যে তিনটি সংখ্যার যোগফল, দেখা যাইবে যে কোন ক্রমানুসারেই হউক কেন একই—অনন্য থাকিবে।

উপপাদ্য ১) a+b+c= c+b+a

প্রমাণ	a+b+c=(a+b)+c	সংজ্ঞা অনুসারে
	=(b+a)+c	বিনিময় নিয়ম
	=c+(b+a)	বিনিময় নিয়ম
	=(c+b)+a	সংযোগ নিয়ম
	=c+b+a	সংজ্ঞা অনুসারে

এইভাবে আমরা চারিটি যোগফলের সংজ্ঞা নির্ণয় এবং সংজ্ঞা দিতে পারি।

সংজ্ঞা a+b+c+d =(a+b+c)+d.

এবং পূর্বেকার প্রক্রিয়ার মত অর্থাৎ বিনিময় ও সংযোগ নিয়মের সাহায্যে দেখান যায় যে চারটি সংখ্যার যোগও কোনদিক দিয়াই ক্রম সন্নিবেশের উপর নির্ভর করে না।

যোগ প্রক্রিয়ায় শূন্য সংখ্যার (০) একটি বিশেষ ভূমিকা বর্তমান। আমরা জানি, যে কোন বাস্তব সংখ্যা a এবং শূন্যের ০ সহিত যোগফল aই হয়, যথা a+০=a=০+a ; আমরা দেখিব যে, যেহেতু এইরূপ যোগের ফলে a সংখ্যাটির কোন পরিবর্তনই ঘটে না, ফলে, এই সূত্রে আমরা এই স্বভাবকে নিম্নলিখিত সংজ্ঞায় স্থির করিতে পারি।

সংজ্ঞা : বাস্তব সংখ্যাগুলির যোগপ্রক্রিয়ায়, শূন্য ০ বাস্তব সংখ্যাটিকে অভেদসূচক সংখ্যা বলা হয়। এই সংজ্ঞার অর্থ হইল : "যে কোন বাস্তব সংখ্যা 'a' র ক্ষেত্রে, a+০=০+a=a।"

ধরা যাক, একটি বাস্তব সংখ্যা a লওয়া হইল। এখন এমন কোন বাস্তব সংখ্যা b থাকিতে পারে কি, যাহার সহিত যোগ করার ফলে a+b=০ হইবে? যদি a=২ হয় তাহা হইলে b=−২

যদি a=৩ হয় এবং a+b=০ হয়, তবে b= −৩ হইবে। সাধারণ ভাবে, a+(−a) =(−)+a=০, যেখানে a ঋণাত্মক বা ধনাত্মক যে কোন সংখ্যা হইতে পারে।

এবং এই প্রকৃতি যখন আমরা অনুধাবন করি তখন আমরা পুনরায় নিম্নলিখিত সংজ্ঞা স্থির করি।

সংজ্ঞা : বাস্তব সংখ্যা (−a) কে a এর যৌগিক বিপরীত (additive inverse) বলিয়া ধরা হয়, ইহার অর্থ : a+(−a)=০=(−a)+a এবং এই সত্যকে আমাদের এইভাবে স্মরণ রাখিতে হইবে—যে কোন বাস্তব সংখ্যা ও তাহার যোগ বিপরীত এর যোগফল সকল সময়ই যোগ অভেদের সমান হইবে!

সহসা, বিপরীত (inverse) শব্দটি কেন ব্যবহার করা হইল তাহা এইভাবে বিশ্লেষণ করা যায়;—আমরা শূন্য ০ হইতে আরম্ভ করি এবং তাহার সহিত যদি a যোগ করি, তবেই a সংখ্যাটি পাই। এখন এই a হইতে যদি আমরা ০ শূন্যতে ফিরিয়া যাইতে চাই, তাহা হইলে আমাদের aর সহিত (−a) যোগ করিতে হইবে'। এবং এই সংখ্যা (−a) যোগ করার প্রক্রিয়ার জন্যই a যোগ

করার ফল নষ্ট হয়। তাই এই ব্যাপারকে বিপরীত (inverse) প্রক্রিয়া বলা হয়। অবশ্য এখানে বলিয়া রাখা যাক যে, এখন যে বিপরীত (inverse) সংজ্ঞার আলোচনা আমরা করিলাম বা সংজ্ঞা স্থির করা হইল তাহার সহিত—আমরা যখন গুন প্রক্রিয়ার জন্য যে বিপরীত (inverse) সংজ্ঞা নির্ধারণ করিব উহার সহিত কোন সম্পর্ক নাই।

সমস্যা : ১) নিম্নলিখিতগুলি প্রমাণ করিতে বিনিময় ও সংযোগ নিয়ম ব্যবহার কর।

ক) ২+১০+৭=১০+২+৭

খ) ৪+½+π+৯=৯+½+π+৪

গ) $a+b+c=c+a+b.$

ঘ) $a+b+c+d=d+c+b+a.$

২) $a+b+c+d+e$ এর সংজ্ঞা দাও।

৩) সংখ্যাগুলির যোগ-বিপরীত গণনা কর :— ৩, ½, −৪, ০, π, ১৫, √২

৪) সাধারণত যোগ করিবার সময় আমরা প্রথম উপর হইতে নীচের দিকে আসি অর্থাৎ যোগ করি, পরে যোগ সম্পূর্ণ হইলে, উহা যোগ করা সঠিক হইয়াছে কিনা পরীক্ষার নিমিত্ত নিম্ন সংখ্যা হইতে উপর দিকে যোগ করিয়া দেখি। এখন, এই নিয়মটির যথার্থতা বর্ণনা কর।

৫) বাস্তব সংখ্যা কি বিয়োগ প্রক্রিয়ার জন্য ক্লোজার নিয়ম অনুসরণ করে?

৬) বিয়োগ প্রক্রিয়া কি বিনিময় নিয়ম এবং সংযোগ নিয়ম অনুসরণ করে?

৭) বিয়োগ প্রক্রিয়ার কি কোন অভেদ সূচক উপাদান (identity element) বর্তমান?

বাস্তব সংখ্যার গুণ প্রক্রিয়া—

এখন আমাদের সম্মুখে যোগের অত্যাবশ্যকীয় নিয়মগুলি রহিয়াছে অর্থাৎ আমরা উহা জানিয়াছি। ফলে, দেখা যাইবে গুণের নিয়মও খুব সহজ। সাধারণ ভাবে বলা যায় প্রায় ব্যাপারেই যোগের নিয়মগুলির ক্ষেত্রে যোগ বাক্যটি বাদ দিয়া গুন লিখিলে চলিবে।

গুণের ক্লোজার নিয়ম : দুইটি বাস্তব সংখ্যা a ও b যদি গুণ করা যায় $a \times b$ তবে ইহাদের গুণফল হইবে তৃতীয় একটি সংখ্যা c, $a \times b = c$

গুণের বিনিময় নিয়ম : $a \times b = b \times a$

গুণের সংযোগ নিয়ম : $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

এখন প্রশ্ন উঠিবে গুণ প্রক্রিয়ায় কোন সংখ্যাটি একক? ইহা এমন সংখ্যা b যাহা যে কোন বাস্তব সংখ্যা aর জন্য $a \times b = a$ হইবে। পরিষ্কার করিয়া বলিলে, এই অর্থ হয়—a এমন এক সংখ্যা যাহাকে bর দ্বারা গুন করা হইলে কোনই পরিবর্তন ঘটিবে না—যেমন যোগ প্রক্রিয়ায় আমরা দেখি যে a এর সহিত শূন্য o যোগ করিলে a এর কোন পরিবর্তন ঘটে না। স্পষ্টতই গুণের ক্ষেত্রে সেই একক সংখ্যাটির সঠিক সংকলন ১।

সংজ্ঞা : বাস্তব সংখ্যা একককে গুণ প্রক্রিয়ার একক সংখ্যারূপে পরিগণিত করা হয়। উপরোক্ত সংজ্ঞাকে আমরা এইরূপ ভাবে লিখিতে পারি—যে কোন বাস্তব সংখ্যা a এর জন্য a × ১ = ১ × a = a.

এখন প্রশ্ন উঠিবে তাহা হইলে গুণ প্রক্রিয়ার a এর বিপরীত কি? 'a' সংখ্যার বিপরীত

(inverse) যে 'b' তাহার এমনই স্বভাব বা ধর্ম থাকিবে যে a × b = ১ (একক) হইবে। এবং ইহা আমাদের পূর্ববর্ণিত যোগ প্রক্রিয়ার 'বিপরীত' এর সহিত তুলনীয়।

a সংখ্যাটির বিপরীত এর সঠিক সংকলন ১/a ; অবশ্য বাস্তব সংখ্যার জন্য ইহার একটি অস্বস্তিকর ব্যতিক্রম হয়। সেই ব্যতিক্রম $a=o$ হিসাবে বলা যায়। ফলে আমরা দেখিতে পাই এমন কোন সংখ্যা b নাই যে সংখ্যার বলে আমরা অনায়াসে o × b = ১ ফল লাভ করিতে পারি তাই শূণ্য 'o'র কোন গুণ প্রক্রিয়ায় বিপরীত নাই।

সংজ্ঞা। বাস্তব সংখ্যা ১/a ($a \neq o$) কে—বাস্তব সংখ্যা $a(a \neq o)$ এর গুণ প্রক্রিয়া-সম্ভব বিপরীত বলা হয়। আমাদের এই কথনকে (statement) সংজ্ঞাকে এইরূপ ভাবে লেখা যায়,—

$$a \times (\tfrac{1}{a}) = (\tfrac{1}{a}) \times a = 1 \qquad a \neq o$$

এবং এইরূপ রীতি পদ্ধতিকে এই ভাবে ভাবা যায় বাস্তব সংখ্যার গুণ ফল এবং উহার গুণ-প্রক্রিয়া-সম্ভব (multiplicative) বিপরীতই গুণ প্রক্রিয়া-সম্ভব একক (identity)।

এই সূত্রে একটি সর্বশেষ নিয়ম নির্দ্ধারিত আছে- যে নিয়ম একাধারে, গুণ এবং যোগ এই দুই প্রক্রিয়ার মধ্যে যোগসূত্র স্থাপন করে। আমরা সাধারণত গুণ প্রণালীকে নিম্নলিখিতভাবে করিতে অভ্যস্ত ৪(২+৩)=(৪×২)+(৪×৩); অথবা ২(x+y)=২x+২y. ইত্যাদি আবার অনেক সময় দেখা যায় (গুণের) উৎপাদক নির্ণয় করিতে আমরা এই প্রণালীর উল্টা ভাবে করি—যেমন ৩x+৬y = ৩(x+২y) এবং এই সকল প্রণালীতে আমরা নিম্নলিখিত নিয়ম অনুসরণ করি।

(ক্রমশঃ)

আনন্দমোহন ঘোষ
Principles of Mathematics হইতে

ইউক্লিডীয় জ্যামিতি বিষয়ক আলোচনা

গত শতাব্দীর মধ্যভাগ পর্যন্ত দুই হাজার বৎসর ধরিয়া য়ুরোপীয় গণিতজ্ঞগণ কাগজ, পেন্সিল, সরল রেখা, কম্পাস ইত্যাদির ভিত্তিতে গঠিত জ্যামিতি বিদ্যার যে বিশেষ শাখা তাহাতেই জ্যামিতির আলোচনা সীমাবদ্ধ রাখিয়াছিলেন। এই প্রসঙ্গে প্লেটোর নাম উল্লেখযোগ্য। তিনি খৃষ্টপূর্ব ৪২৯ অব্দে এথেন্স নগরীতে জন্মগ্রহণ করেন। তিনি ছিলেন একজন প্রসিদ্ধ দার্শনিক। বহু জ্ঞানেচ্ছু ব্যক্তি যাঁহার নিকট হইতে জ্ঞানার্জন করিয়াছিলেন। খৃষ্টপূর্ব ৩৮০ অব্দে তিনি 'আকাদমী' নামক একটি বিদ্যালয় প্রতিষ্ঠা করেন। তিনি এতই জ্ঞানী ছিলেন যে 'আকাদমীর' পণ্ডিতগণ বিনাদ্বিধায় তাঁহার তত্ত্বগুলি স্বীকার করিয়া লইতেন। তাঁহার অসামান্য প্রভাব শুধু সমকালীনই নহে, উত্তরকালীন পণ্ডিতদের উপরও বিস্তৃত হইয়াছিল। প্লেটো বিশ্বাস করিতেন যে গণিত ও দর্শনের মধ্যে এক অতি ঘনিষ্ঠ সম্পর্ক বিদ্যমান। তিনি বলিতেন যে 'দর্শন শিক্ষার জন্য জ্যামিতিচর্চা অপরিহার্য' এবং 'আকাদমীর' প্রবেশদ্বারের উপরে লিখিত ছিল 'যিনি জ্যামিতি জানেন না তাঁহার এইখানে প্রবেশের অধিকার নাই।' আদর্শ ও পূর্ণতাই প্লেটোর দর্শনের মূলগত ভাব। তাঁহার অখণ্ডসত্য ও স্বেচ্ছাসংকল্পিত ন্যায়নিষ্ঠা পরমতত্ত্ব। ইহারা কোন সময়েই সম্পূর্ণ লভ্য নহে, তথাপি এই দুই পরম আদর্শের অভিমুখে লৌকিক বস্তুনিচয় অগ্রসর হইতে পারে। এই শিক্ষায় তাঁহার 'সামান্য' তত্ত্ব (theory of forms) গুরুত্বপূর্ণ স্থান অধিকার করিয়াছে। স্বতঃসিদ্ধ, সংজ্ঞা ও উপপত্তি (বা প্রাক্‌প্রত্যয়) হইতে কি ভাবে নিয়মানুগ যৌক্তিক ক্রমঃবিকাশের ধারায় নবতর সত্যের উদ্‌ঘাটন হয়, সে সম্বন্ধে তিনি বিস্তৃত আলোচনা করিয়াছেন। প্লেটো স্বতঃই মনে করিতেন যে বৃত্তেই আকৃতি (figure) পূর্ণতা লাভ করিয়াছে; তাই জ্যোতিষ্কের আবর্তন পথও বৃত্তাকার। সরল রেখাকেও তিনি আদর্শের বিশেষ উদাহরণ হিসাবে গ্রহণ করিয়াছেন। তিনি মনে করিতেন যে নানা বস্তু সরলতার অভিমুখে অগ্রসর হইতে পারে, কিন্তু কোনটিই পূর্ণ সরলতার সহিত অভিন্ন হইতে পারে না। তাঁহার 'সামান্য' তত্ত্বে সরলতার সহিত 'প্লেটো' পূর্ণতার আরও কয়েকটি প্রত্যয়কে—যেমন একরূপতা (unity), ১, এবং বৃত্তের পূর্ণতা প্রভৃতি তত্ত্বকেও—উদাহরণ হিসাবে উল্লেখ করিয়াছেন।

'আকাদমী'তে প্লেটোর উত্তরসূরীগণের দ্বারা জ্যামিতির যে নূতন রূপায়ণ হইয়াছিল, তাহা পূর্বধৃত মৌলিক সত্যেরই যুক্তি অনুসারী বিবর্তন মাত্র—উপপত্তি ও স্বতঃসিদ্ধ হইতে যুক্তিধারা ও ও পারম্পর্যানুসারে প্রতিপাদিত, তাঁহাদের এই প্রয়াসে সরলরেখা ও বৃত্তের বহুল ব্যবহার হইয়াছে। কারণ তাঁহাদের সকলের মতেই আকারগত দিক হইতে সরলরেখা ও বৃত্ত পূর্ণতা ও আদর্শের পরাকাষ্ঠা। স্পষ্টতঃই বুঝিতে পারা যায় যে তাঁহাদের এই পূর্ণতা বা আদর্শের ধারণা প্রধানতঃ অমূর্ত ও সৌন্দর্যাশ্রয়ী।

মিশরকে কেন্দ্র করিয়া মহামতি আলেকজান্দারের যে সাম্রাজ্য ছিল, আলেকজান্দারের পরে খৃষ্টপূর্ব ৩০০ অব্দে 'টলেমী' সেই সাম্রাজ্যের উত্তরাধিকারী হন। তিনি 'আলেকসান্দ্রিয়া' নগরীতে এক বিশ্ববিদ্যালয় প্রতিষ্ঠা করেন, কিন্তু অধ্যাপকের জন্য তাঁহাকে এথেন্স নগরীর উপর নির্ভর করিতে হয়। ইউক্লিডকে সেই বিশ্ববিদ্যালয়ের গণিতবিভাগের প্রথম এবং প্রধান নিযুক্ত করা হইল। প্লেটোর আকাদমীর জ্যামিতিক ঐতিহ্যের একজন ন্যায়নিষ্ঠ ব্যাখ্যাকারী ছিলেন ইউক্লিড। ইহা ছাড়াও জ্যামিতি বিদ্যার এক পূর্ণ ও বিশদ ব্যাখ্যা তিনি নিজে করিয়াছেন—এক কথায় ইহা যথানির্দিষ্ট স্বতঃসিদ্ধ ও উপপত্তি (প্রাক্‌প্রত্যয়) হইতে অবরোহ তর্ক পদ্ধতির নিয়মানুসৃত মতবাদ। জ্যামিতিক সংগঠনের জন্য ইহা মাপনী ও কম্পাসের ব্যবহার করে। যৌক্তিক ক্রমঃবিকাশের দিক হইতে ইউক্লিডের জ্যামিতি এতই সুসমঞ্জস, সুসংবদ্ধ ও সম্পূর্ণ যে যথার্থ উক্তি ও বুদ্ধিবৃত্তির সততার দিক হইতে ইহা এক বলিষ্ঠ ও উন্নত আদর্শ হইয়া রহিয়াছে এবং সুচিন্তিত, পাণ্ডিত্যপূর্ণ আলোচনা হিসাবে জ্যামিতির স্থানকে সুউচ্চ ও সুদৃঢ় পাদভূমিতে স্থাপন করিয়াছে। ইউক্লিড খৃষ্টপূর্ব ৩০০ অব্দ হইতে ২৭৫ অব্দের মধ্যে জ্যামিতির যে পাঠ্যপুস্তক রচনা করেন তাহা বর্তমান শতাব্দী পর্যন্ত বিদ্যালয়ের আদর্শ পাঠ্যপুস্তক হিসাবে ব্যবহৃত হইয়া আসিতেছে। একটি আদর্শ পাঠ্যপুস্তক দুই হাজার বৎসরের অধিক একই স্থান অধিকার করিয়া থাকিতে পারে না—যদি তাহাই হয়, তবে উহার দ্বারা কল্পনার প্রসার অবরুদ্ধ হইতে বাধ্য। অথচ উনবিংশ শতাব্দীর পূর্ব পর্যন্ত ইহাই একমাত্র পাঠ্যপুস্তক হিসাবে প্রচলিত ছিল, কিন্তু উনবিংশ শতাব্দীতে রীমানও লোবাচেভস্কি প্রমুখ ব্যক্তিগণ 'অ-ইউক্লিডীয়' জ্যামিতি আবিষ্কার করার ফলে 'স্থান' (space) এর প্রতি আরও দুঃসাহসিক পদক্ষেপ সম্ভব হইয়াছিল। বর্তমান ছাত্রদের নিকট জ্যামিতির প্রতি নূতন ও উৎসাহজনক দৃষ্টিভঙ্গী এখন সহজলভ্য। কিন্তু ইহা সত্ত্বেও ইউক্লিডীয় জ্যামিতিকে বুনিয়াদ করিয়াই যে পূর্ণাঙ্গ শিক্ষা হয় তাহাই নিশ্চিতভাবে নূতন দৃষ্টিভঙ্গীর ভিত্তিবিশেষ।

অতএব দেখা যাইতেছে যে দুই হাজার বৎসর ধরিয়া পাশ্চাত্যের মানুষ 'স্থান' (space) সংক্রান্ত সমস্যার রহস্য উদ্‌ঘাটনে নিযুক্ত রহিয়াছে, এবং এমন কতকগুলি নিয়মানুযায়ী জ্যামিতি-বিদ্যাকে উপপাদন করিয়াছে যাহা মাপনী ও কম্পাস, কাগজ ও পেন্সিল ব্যবহারের উপরেই নির্ভরশীল ছিল। খৃষ্টপূর্ব ৪র্থ শতকে প্রতিষ্ঠিত প্লেটোর 'আকাদমী'র ঐতিহ্যের দ্বারা অনুপ্রাণিত হইয়াই গণিতজ্ঞেরা যৌক্তিক বিকাশের চরমপূর্ণতা ও যথাযথ বর্ণনার আদর্শ হিসাবে জ্যামিতির সন্ধান পাইয়াছিলেন। তাঁহাদের এই অনুসন্ধানী প্রচেষ্টায় 'আকাদমী'র কার্যপদ্ধতি নিয়মাবলীই অনুসৃত হইয়াছিল।

বিংশ শতাব্দীর আরম্ভ পর্যন্ত ইংলণ্ডে ইউক্লিডের এলিমেন্টস নামক পুস্তকটি বিদ্যালয়ের জ্যামিতি শিক্ষার আদর্শ পাঠ্যপুস্তক হিসাবে ব্যবহৃত হইয়াছিল। ১৮৭১ খৃষ্টাব্দে জ্যামিতি শিক্ষাকে সংস্কার করিবার অভিপ্রায়ে 'The Mathematical Association' স্থাপিত হয়। উহা জ্যামিতির পাঠক্রমকে সংশোধন করিবার প্রস্তাব করিয়া অনেকগুলি বিবরণী পেশ করিয়াছে। ১৯৩৯

খৃষ্টাব্দে উহার সাম্প্রতিকতম বিবরণীতে ইউক্লিডীয় জ্যামিতির সহজীকরণ ছাড়াও বৃহত্তর কোন সাংগঠনিক কার্যের উপর উহার লক্ষ্য ছিল তাহা নিম্নলিখিত উদ্ধৃতি হইতেই উহা বুঝা যাইবে :

স্বজ্ঞা ও ন্যায় (Intuition & Logic) :

জ্যামিতিক শক্তি স্বজ্ঞা ও ন্যায় এই দুইটি পদ্ধতির উপর নির্ভর করে এবং উহাদের একটির উপর প্রথানুযায়ী স্বীকৃতি ছাড়া আরও স্বতঃস্ফূর্ত স্বীকৃতি প্রয়োজন। ইহা খুবই সত্য যে যুক্তিতর্কের প্রতি অভিনিবেশ প্রয়োজন, কিন্তু ঐতিহ্যপরম্পরায় এই পদ্ধতিটির উপর এতই অতিরঞ্জিত গুরুত্ব আরোপিত হইয়াছে যে অন্যটি, যাহা কোনমতেই কম গুরুত্বপূর্ণ নহে, বিশেষ ভাবে উপেক্ষিত হইয়াছে।

"ইউক্লিড যে সময়ে শীর্ষস্থানীয় ছিলেন সেই সময় এই অবস্থা স্বাভাবিক ছিল ; তখন পাঠ্য-বিষয় 'জ্যামিতি' ছিল না, ছিল 'ইউক্লিডের জ্যামিতির উপাদান'। এবং অভ্যাসগত ভাবে উহা বিশুদ্ধ ও সরল 'ইউক্লিড'ক পরিণত হইয়াছিল।"

"ইউক্লিডের বিখ্যাত পুস্তকটি যদিও জ্যামিতিবিদ্যার 'উপাদান' সম্পর্কিত যুক্তিপূর্ণ সুসংবদ্ধ আলোচনা, কিন্তু এই বিষয় সম্পর্কিত নয়—এ কথা জোরের সঙ্গেই বলা চলে, কারণ ঐ যুগে জ্ঞাত জ্যামিতি বিষয়ক সাধারণ তথ্যাবলীর বিশেষ আলোচনা ঐ পুস্তকে নাই। এখন যে ব্যাপকতর ক্ষেত্রের সহিত আমাদের পরিচয় ঘটিয়াছে সেই ক্ষেত্রের আলোচনা তো নাই-ই। ইউক্লিডের পুস্তকে যাহা আছে তাহা হইল ঐ সব তথ্যের মধ্যে যেগুলি সরলতম তাহাদের যৌক্তিক বিচার বিশ্লেষণ। সুতরাং যে সময়ে বিদ্যালয়ে 'জ্যামিতি' বলিতে 'ইউক্লিড'কে বুঝাইত সে সময় ইহা মোটেই অস্বাভাবিক ছিল না যে পরীক্ষাগ্রহণকারী সংস্থাগুলি তর্কশাস্ত্রকে—ইউক্লিডের বিকল্প বিষয় হিসাবে অনুমোদন করিত। কেন না ইউক্লিডের সারবস্তু হইল পূর্ব হইতে সুপরিজ্ঞাত তথ্যের যৌক্তিক বিচার ও বিশ্লেষণ—ঐসব তথ্যকে প্রথম জানিবার স্বাভাবিক পদ্ধতি নহে।"

"আজ পর্যন্ত উন্নত জ্যামিতিক বিদ্যার এমন সব ক্ষেত্র আছে যেখানে যৌক্তিক দিকটাই প্রধান, শুধু তাহাই বা কেন—আত্যন্তিক। চার বা ততোধিক মাত্রার জ্যামিতি বিদ্যাসমূহে 'স্বজ্ঞা'র সাহায্য অপ্রাপ্য। তাই আত্যন্তিকভাবে না হইলেও এই সব বিদ্যা প্রধানতঃ যুক্তি-নির্ভর। 'Axiomatik'এ বা 'স্বতঃসিদ্ধ প্রমাণে' 'স্বজ্ঞা'কে স্বেচ্ছায় বর্জন করাই নিরাপদ, তাহা না হইলে এই ভীতি সর্বদাই বর্তমান যে যদি অগোচরে কোন অচেনা প্রকল্প জ্ঞানরাজ্যে প্রবেশ করে।"

"তবে বিদ্যালয় পাঠ্য সরল পুস্তকাদিতে আমাদের সমস্যা ভিন্ন প্রকারের। সেই সমস্যা হইল :— ১। জ্যামিতি বিষয়ক তথ্যের প্রাথমিক স্বীকৃতি ; ২। জ্যামিতিক প্রত্যক্ষ শক্তির বিকাশ। এই শক্তি যে পর্যন্ত কিছুটা না আয়ত্ত হইতেছে, সে পর্যন্ত তথ্য লইয়া যুক্তি করিবার প্রচেষ্টা প্রায়শঃই বাধাপ্রাপ্ত হয়। কাজেই এই আপাতবিরোধী (Paradox) পরিস্থিতির কথা উঠে যে, অনেকক্ষেত্রেই তথ্য যতক্ষণ না স্বতঃসিদ্ধ হইয়া উঠে ততক্ষণ পর্যন্ত যুক্তি বিন্যাসের কোন সার্থকতাই দেখা যায় না।"

"আমাদের এ উপলব্ধি অবশ্যই বাধাপ্রাপ্ত হয় যখন আমরা দেখি যে বিদ্যালয় পরিবেশে ছাত্ররা প্রায়ই বলে "এ'তো স্বতঃসিদ্ধ।" অজ্ঞতা আবৃত করিবার জন্যই একথা বলা হয়। শিক্ষকেরাও

বলিতেন—"ইউক্লিড সম্বন্ধীয় পরীক্ষাপত্রে যখনই আমি 'স্বতঃসিদ্ধ' শব্দটি পাই, তখনই আমি ভাবি যে কোথাও কোন গলদ রহিয়াছে। তথাপি জ্যামিতিবিদ্যার বহু প্রতিজ্ঞা সম্বন্ধেই এ কথা সত্য যে, যত দিন পর্যন্ত এইসব প্রতিজ্ঞা শুধুমাত্র প্রমাণসিদ্ধ না হইয়া, ছাত্রের কাছে স্বতঃসিদ্ধ হইয়া না উঠিতেছে, বুঝিতে হইবে ততদিন তাহার জ্যামিতি প্রত্যক্ষে কোথাও বিশেষ কোন ত্রুটি রহিয়া গিয়াছে।"

অধিবৃত্ত বা প্যারাবোলা প্রভৃতি জ্যামিতিক বক্ররেখার সুষ্ঠু অনুসন্ধান করিতে হইলে পূর্বে গ্রাফ-কাগজে নক্সাকৃত সংখ্যাসূচক তথ্যের ভিত্তিতে চিত্রটিকে আঁকিতে হইবে। গ্রাফ-কাগজের জ্যামিতি (Squared-paper Geometry) Rene Descartes (১৫৯৬—১৬৫০)-এর কার্যের ফলে সম্ভব হইয়াছিল। তাঁহার কার্যের ফলে অনেক জটিল বক্ররেখা বুঝা গিয়াছিল। উহার দ্বারা 'এয়ারফইল' (যাহাকে নির্দিষ্ট অবস্থার উপযুক্ত হইতে হয়) প্রভৃতি আকারের নক্সাও সম্ভব হইয়াছিল। ইহা ছাড়াও তাঁহার কাজ বীজগণিতিক 'function'-এর বৈশিষ্ট্য বুঝিতে অনেক সাহায্য করিয়াছিল। 'Cartesian Co-ordinates', 'Cartesian Geometry' বা 'Co-ordinate Geometry-র ব্যবহার এই পুস্তকের পরিসরের বাহিরে কিন্তু Descartes ও তাঁহার পথপ্রদর্শক কাজের উল্লেখ না করিয়া জ্যামিতির কোন পরিচ্ছেদ সম্পূর্ণ হইতে পারে না।

অনুশীলনী

১। একটি গাছ, একটি বাড়ী ও একটি ব্যাগ নির্বাচন কর এবং তাহাদের আকৃতি যথাসাধ্য ভাল ভাবে বর্ণনা কর।

(ক) তোমার বর্ণনার মধ্যে সংখ্যা না আনিয়া—

(খ) যখন তোমার ইচ্ছামত তুমি বর্ণনার মধ্যে সংখ্যাসূচক আনিতে পার। (সংখ্যাসূচক তথ্য বলিতে "যতখানি চওড়া তাহার দ্বিগুণ উঁচু" প্রভৃতি এবং "১৫ ফিট" বা "৪৫°" প্রভৃতি বুঝায়।

জিনিষটির আকৃতির উপর তুমি তোমার বর্ণনা সীমাবদ্ধ করিবে। সম্ভব হইলে তোমার বর্ণনানুসারে কাহাকেও সেইরকম গাছ, বাড়ী বা ব্যাগ নির্বাচন করিতে বল। তোমার বর্ণনার সত্যগুলি লক্ষ্য কর।

২। একটি ত্রিভুজ কাটিয়া লও। ত্রিভুজের সন্নিহিত বাহুগুলি একটির উপর আর একটি ফেলিয়া ভাঁজ করিয়া কোণগুলিকে সমদ্বিখণ্ডিত কর। দ্বিখণ্ডকগুলি একটি বিন্দুতে ছেদ করে কি না দেখ। ঐ বিন্দুটিকে 'ক' বল এবং কম্পাসের সাহায্যে প্রয়োজনীয় ব্যাসার্দ্ধ লইয়া ঐ বিন্দুটিকে কেন্দ্র করিয়া একটি বৃত্ত আঁক যাহা ত্রিভুজটির মধ্যে অবস্থান করিতেছে ও বাহুগুলিকে স্পর্শ করিতেছে।

৩। এক সারি উলের বুননের আকৃতিটি মোটামুটি আঁক। তাহার পর পরবর্তী সারিটি

আঁক ও তাহারা কেমন করিয়া সংগ্রথিত হইতেছে দেখাইয়া দাও। তোমার ছবিতে উলের 'সোজা' বুনন এবং 'সোজা-উল্টা' বুননের সংগ্রথনের পার্থক্য দেখাইয়া দাও।

৪। তুমি তোমার ডান হাতটি নাড়াইলে আয়নার প্রতিচ্ছবির বাম হাতটি নড়ে; তোমার ডান কানটি লাল হইলে উহার বাম কানটি লাল দেখায়। আমরা বলি, যে আয়নার প্রতিচ্ছবি 'পার্শ্বিকভাবে বিপর্য্যস্ত' (Laterally reversed)। ইহা কেন ঐরকম তাহা বুঝাইয়া দাও এবং কেন বামদিকটি ডানদিক ও ডানদিকটি বামদিক হয় কিন্তু কেন 'উপর' 'নীচ' হয় না ও উর্দ্ধতন দিকে কোন বিপরীত ভাব হয় না তাহা বুঝাইয়া দাও।

৫। একটি রাস্তার ১৯৩৪ সালে তোলা ছবি ও ১৯৫৯ সালে তোলা ছবির দিকে তাকাইলে মোটর গাড়ীর চেহারার তফাৎ দেখিয়া তুমি বলিতে পারিবে কোনটি কোন সময়ের? ছবিগুলি খুঁটিনাটির পক্ষে অতিরিক্ত ছোট ধরিয়া লইয়া দুইটি মোটরে সাধারণ আকৃতির পার্থক্য বর্ণনা কর।

পুনরায় খুঁটিনাটি উপেক্ষা করিয়া তুমি কি ঐভাবে পুরুষের বা স্ত্রীলোকের পরিচ্ছদের পার্থক্য বর্ণনা করিতে পারিবে?

৬। প্রায় পঞ্চাশ বৎসর পূর্বের কোন পুস্তক, পত্রিকা বা খাদ্যের টিনের লেবেল সংগ্রহ কর। নামপত্রে ও মূল অংশে উহাদের ছাপা লক্ষ্য কর সৌন্দর্য্যের কথা বাদ দিয়া আকৃতির দিক হইতে তাহাদের পার্থক্য দেখাও। প্রায় ১৯১০ সালে গৃহীত কোন রেল স্টেশনের ছবি বা পুরাতন বাসের গন্তব্যস্থলের নামাঙ্কিত পাটাতন পাইলে স্টেশনের বা গন্তব্যস্থলের নামের ছাপার সহিত আজিকার দিনের ছাপার তুলনা কর এবং তোমার ভাবনা জ্যামিতিক দিক হইতে সীমাবদ্ধ কর।

৭। কোন দুষ্ট বালক A, B, C নামক তিনটি সমান লম্বা সাপের লেজে কিছু সুগন্ধ দ্রব্য মাখাইয়া দিয়াছিল। ঐ সুগন্ধিটি সাপেরা পছন্দ করে। সুতরাং A সাপ B সাপের লেজ গিলিতে আরম্ভ করিল এবং একই সঙ্গে B সাপ C সাপের লেজ ও C সাপ A সাপের লেজ গিলিতে আরম্ভ করিল। এই জাতির সাপের কোন দ্রব্য চিবাইবার বদলে গিলিবার অভ্যাস আছে। এই গিলিবার প্রক্রিয়াটি কখন থামিবে? শেষ অবস্থাটির দুইটি ছবি আঁক, একটি উপর হইতে দেখিলে যেমন দেখায় ও অপরটি সাপেদের।

The language of Mathematics by Frank Land. হইতে। অনুবাদক—সৌম্য চক্রবর্ত্তী

বীজগণিতের ইতিকথা

বীজগণিতের ইতিহাস লইয়া আলোচনা করিতে গেলে, প্রথমেই এই কথাটির অর্থ জানা দরকার। বীজগণিত বলিলে যদি আমরা এমন কোন বিজ্ঞানকে বুঝি যাহা আমাদের $ax^2+bx+c=0$ এই সমীকরণের সমাধান করিতে সাহায্য করে তাহা হইলে বীজগণিতের জন্ম সপ্তদশ শতাব্দীতে। কিন্তু এই সকল বিশেষ বিশেষ চিহ্নের বাধা কাটাইয়া যদি আমরা আরও সহজতর চিহ্নের কথা লইয়া আলোচনা করি, তাহা হইলে আমাদের ইতিহাসের সুরু তৃতীয় শতাব্দী হইতে। আবার বীজগণিতের সাহায্য ছাড়া কেবল জ্যামিতিক নিয়মাবলীর সাহায্যেই উপরোক্ত সমীকরণটি সমাধিত হইয়াছিল আলেকজান্দ্রিয় চিন্তাধারার যুগে—অথবা কিছু পূর্বে। কিন্তু বীজগণিতের নানান সমস্যা কেবল বীজগণিতের সাহায্যেই সমাধিত হইতেছে খৃষ্টপূর্ব অষ্টাদশ শতাব্দীর কিছু পূর্ব হইতে।

* * * * সেই সকল মহাত্মাদিগের স্মরণ করিয়া আমরা বীজগণিতের জগতে প্রবেশ করিব যাঁহারা এই বিজ্ঞানের প্রতিষ্ঠায় বিভিন্নভাবে সাহায্য করিয়াছেন এবং যাঁহারা সেই সকল প্রশ্নের সূচনা করিয়াছেন, যেগুলি পরে সমীকরণের সাহায্যে সমাধিত হইয়াছে। এই বিষয়ের প্রাথমিক আলোচনায় বলা দরকার যে নেসলম্যান (১৮৪২) বীজগণিতের ইতিহাসকে তিনটি পর্যায়ে বিভক্ত করিয়াছিলেন—যেমন আলংকারিক, যে সময়ে শব্দগুলি পূর্ণ আকার ধারণ করিয়াছিল; syncopated অর্থাৎ যে সময় সংক্ষেপণগুলি ব্যবহার করা হইত; এবং প্রতীকরূপ, যখন সংক্ষেপনগুলিই প্রতীকের আকার ধারণ করিয়াছিল, যেমন $\sqrt{x}-x^2={}_{8}\frac{2}{3}$। এই কাল পর্যায়ের মধ্যে কোন নির্দিষ্ট সীমারেখা নেই; "ডায়োফ্যান্টাস্" এই তিনেরই বিভিন্ন অঙ্গিকের সাহায্য লইয়াছিলেন। এই সকল বিভাগের সুবিধাও অনেক আছে, যেমন ছাত্রেরা প্রায়ই এই শব্দগুলির উপযোগিতা অনুভব করিতে পারে।

একথা স্মরণে রাখা প্রয়োজন যে গ্রীসদেশের বাহিরের পুরাতন লেখকদের অঙ্কবিষয়ক রচনায় বহু অন্যতর বিষয় বিধৃত। এম্‌স (Ahmes—1550 B. c) যেমন তাঁহার বীজগণিতের মধ্যে জ্যামিতি এবং পরিমিতির স্থান দিয়াছিলেন, এমন কি ত্রিকোনমিতির কিছু কিছু প্রাথমিক অংশও তাঁহার রচনায় পাওয়া যায়। ডায়োফ্যান্টাস্ এর পূর্বে রচনার এই ধারার কোনো পরিবর্তন হয়নি।

বীজগণিতের প্রথম প্রবর্ত্তকের নাম এমস্। এবং এমস কৃত সরল সমীকরণ ও রাশিমালা বিষয়ক তাঁহার কিছু কিছু সমস্যা ছিল যেগুলি তাঁহার রচনাকে বৈশিষ্ট্য প্রদান করিয়াছিল। আলংকারিকভাবে তিনি বিষয়টির উপস্থাপনা করিয়াছিলেন, যদিও কিছু সংখ্যক প্রতীকের ব্যবহার তাঁহার রচনায় পাওয়া যায়। এমস একজন মীশরীয়।

মিশরীয় লিপির মধ্যে যে সকল সূত্রের উল্লেখ পাওয়া যায়, তাহার মধ্যে সরল ও দ্বিঘাত সমীকরণের উল্লেখই প্রধান। এই সকল সূত্রের মধ্যে প্রতীকের ব্যবহার খুবই কম এবং বীজগণিত যে তখন বিজ্ঞানের আকার ধারণ করিয়াছিল তাহার প্রমাণও খুব বেশী পাওয়া যায় না।

বীজগণিতের প্রবর্তক হিসাবে চারজন হিন্দুরই নামোল্লেখ করা যাইতে পারে। ইহারা হইতেছেন, আর্যভট্ট—যাঁহার 'আর্যভটম্' গ্রন্থে রাশিমালা বিন্যাস, সরল ও দ্বিঘাত সমীকরণ সংক্রান্ত নানান সমস্যাবলী উল্লিখিত আছে; ব্রহ্মগুপ্ত যাঁহার ব্রহ্মসিদ্ধান্ত গ্রন্থে দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধানের নিয়মাবলী উল্লিখিত আছে। এই গ্রন্থে আর্যভট্ট কর্তৃক যে সকল বিষয় আলোচিত হইয়াছিল সে সকল বিষয়েরও উল্লেখ আছে; মহাবীর, যাঁহার 'গণিত সার সংগ্রহে', রাশিমালা সমীকরণ ও মূলদ রাশি সংক্রান্ত নানান বিষয় আলোচিত হইয়াছে, এবং সর্বশেষে ভাস্কর, যাঁহার বীজগণিত গ্রন্থে নয় পরিচ্ছেদে দ্বি-শক্তি সমীকরণ সংক্রান্ত নানান বিষয়ের আলোচনা আছে।

চীন দেশে কবে বীজগণিত বিজ্ঞান হিসাবে পরিগণিত হইয়াছিল বলা কষ্টকর। বর্তমানে যে সকল সমস্যা আমরা সমীকরণের সাহায্যে সমাধান করিতেছি তাহা খৃঃ পূঃ ১০০০ অব্দেও 'নাইন সেকসানস' গ্রন্থে উল্লেখিত হইয়াছিল।

চীনদেশীয় অঙ্কবিদ্ লিউ হুইয়ের আলোচনামূলক গ্রন্থে prolems of pursuit ক্রমসত্যানুসারিতা সমস্যা Rule of false position—ভ্রমাত্মক উপস্থাপন বিধি ও determinant notation (বর্গাকারে সজ্জিত রাশিমালা) ইত্যাদি বিষয়ে অনেক সমস্যার সন্ধান পাওয়া যায়। তাঁহার এই সমস্ত রচনা এক বিশিষ্ট আলংকারিক বীজগণিতের সৃষ্টি করিয়াছিল।

সান্-ৎসির (খৃষ্টীয় প্রথম শতক, যদিও এ বিষয়ে প্রচুর মতভেদ আছে) রচনার মধ্যে এমন অনেক সমস্যার সন্ধান পাওয়া যায়, যেগুলিকে বর্তমানে বীজগণিতিক বলা যায়। নীচে একটি সমীকরণের উদাহরণ দেওয়া হইল:

"কোন্ সংখ্যাগুলিকে তিন দ্বারা ভাগ করিলে দুই, পাঁচ দ্বারা ভাগ করিলে তিন এবং সাত দ্বারা ভাগ করিলে দুই অবশিষ্ট থাকে?"

সান্-ৎসি এই ধরনের অঙ্ক বিশ্লেষণ পদ্ধতিতে নির্ণয় করিয়াছিলেন; কিন্তু তিনি একটি মাত্র উত্তর লইয়াই সন্তুষ্ট থাকিতেন যদিও একাধিক উত্তর প্রায়শঃই সম্ভব।

খৃঃ পূঃ প্রথম শতাব্দীতেই চীনবাসীরা জানিতে পারিয়াছিল দ্বিঘাত সমীকরনের সমাধানের নিয়ম এবং এই সকল নিয়মাবলী কিউ-চাঙ-শুয়ান-শুর নাইন সেকসন সময়ই বাহির হইয়াছিল। লুই হুই যে সকল নিয়মাবলী বাহির করিয়াছিলেন সেগুলি বর্তমানে বীজগণিতের সূত্র হিসাবে পরিগণিত হইতেছে। ওয়াং-সিয়াও-টুং রচিত 'চি-কু-সুয়ান-কিং' গ্রন্থে যে সকল নিদর্শন পাওয়া যায় তাহাতে মনে হয় যে সপ্তম শতাব্দীতে ত্রিঘাত সমীকরণের প্রতি সকলের দৃষ্টি আকর্ষিত হয়। চৈনিক বীজগণিতের চরম বিকাশ দেখিতে পাই ত্রয়োদশ শতাব্দীতে। এই সময়কার সংখ্যাসূচক সমীকরণ চীন কিউ সাও, লিয়েই এবং চু-শী-কিয়ের ন্যায় পণ্ডিতদিগের দৃষ্টি আকর্ষণ করে।

ষোড়শ শতাব্দীতে জেসুইটসদের আগমনের সংগে সংগে এবং পাশ্চাত্য বিজ্ঞানের বিকাশের সংগে সংগে চীন তাহার স্বদেশী বীজগণিতের প্রতি উৎসাহ হারাইয়া ফেলে এবং ক্রমে বীজগণিতের বিকাশের চেষ্টায় ঔদাসীন্য প্রকাশ পায়।

গ্রীক গণিত শাস্ত্রের স্বর্ণযুগে বর্তমান অর্থ সম্মত বীজগণিতের প্রচলন খুব কমই দেখা গিয়াছিল। এই সময় তাহারা বীজগণিতের নানান দুরূহ সমস্যা কেবল জ্যামিতিক নিয়মের সাহায্যে সমাধান করিয়াছিল। হিপোক্র্যাটস (খৃঃ পূঃ ৪৬০) কেবল অঙ্কনের সাহায্যে $x^2+\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot ax=a^2$, সমীকরণটি সমাধান করিয়াছিলেন, ইউক্লিড (খৃঃ পূঃ ৩০০) তাঁহার—Data—সূত্রাবলীর দ্বারা নিম্নলিখিত সমীকরণগুলি সমাধান করিয়াছিলেন।

১। $xy=k^2$, $x-y=a$ prob 84

২। $xy=k^2$, $x+y=a$ prob 85

৩। $xy=k^2$, $x^2-y^2=a^2$ prob 86

তাঁহার এলিমেন্টস্ (II, 5pt) এ ইউক্লিড $x^2+ax=a$ এই সমীকরণটি সমাধান করিয়াছিলেন এবং $x^2+ax=b^2$ এই সমীকরণটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন পদ্ধতি অবলম্বনে (ঋণাত্মক মূল বাদ দিয়া) সমাধান করিয়াছিলেন। ইউক্লিড এর পর সমগ্র গণিতশাস্ত্র জ্যামিতিক যুগ হইতে বিশ্লেষণ যুগে পদার্পণ করিল। হেরন, যিনি $144x\ (14-x)=6720$ এই সমীকরণটি সমাধান করিয়াছিলেন। তিনি $\frac{11}{14}x^2+\frac{29}{7}x=212$, সমীকরণটির বর্গ নির্ণয় করিবার জন্য বিশ্লেষণের সাহায্য লইয়াছিলেন ডায়োফ্যান্টাস্ এর আবির্ভাবের সংগে সংগে বীজগাণিতিক প্রতীক প্রবর্তিত হইল এবং সম্পূর্ণরূপে বীজগণিতগত সমস্যা পরস্পরাকে বিশ্লেষণ পদ্ধতি দ্বারা বিন্যাস করা হয়। তাঁহার অসংখ্য অস্থিরীকৃত সমীকরণ এখনও ডায়োফ্যান্টাইন সমীকরণ নামে খ্যাত। বীজগণিত শাস্ত্রে তিনিই প্রথম মন প্রাণ নিয়োগ করেন এবং এই কারণেই তাঁহাকে 'বিজ্ঞানের জনক' আখ্যা দেওয়া হয়।

আরব এবং পারসিকদিগের মধ্যে বিখ্যাত বীজগণিত শাস্ত্রবিদেরা হইতেছেন মহম্মদ-ইবণ মুসা, আল-খোয়ারিজমি, তাঁহার আলজাবর ওয়ল মুকাবালা গ্রন্থ হইতে শাস্ত্রের নামকরণ হইয়াছে এবং এই গ্রন্থে সর্বপ্রথম সংখ্যা-তত্ত্ব হইতে স্বতন্ত্র একটি আলোচনা সুসম্বদ্ধভাবে করিয়াছেন, আলমাহানি ত্রিঘাত বিষয়ে যাঁহার নাম উল্লিখিত হইবে এবং আবুকামিল, যিনি আল-খোয়ারিজমির নিকট হইতে অনেক কিছু গ্রহণ করিয়াছেন এবং তাহার নিকট হইতেই ফিবনোচ্চি (১২০২) পরে অনেক কিছু গ্রহণ করেন; আল-কারখি যিনি তাঁহার ফাক্রি গ্রন্থে বীজগণিতের নানা প্রশ্নের উত্থাপন করিয়াছেন, (যাহা এখনও বীজগণিতে সঙ্কলিত হয়) এবং সর্বশেষ ওমর খৈয়ম, যাঁহার বীজগণিত গ্রন্থ সকল পারসিক রচনার মধ্যে শ্রেষ্ঠত্ব অর্জন করিয়াছে।

মধ্য-যুগের পাশ্চাত্য পণ্ডিতদিগের মধ্যে অধিকাংশই পারসিক গ্রন্থের অনুবাদ করেন। ইহাদের মধ্যে জোআনেস্ হিসপালেন্সিস্ যিনি সম্ভবতঃ আল্-খোয়ারিজ্মির বীজগণিত অনুবাদ করেন; ক্রিমোনার যেরার্দো (১১৫০খৃঃ) ও একই গ্রন্থের অনুবাদ করেন, বাথের এ্যাডেলার্ড

(১১২০ খৃঃ) যিনি আল্ খোয়ারিজমির গ্রহ-বিজ্ঞান বিষয়ক রচনাগুলির অনুবাদ করেন, এবং তাঁহার নাম একদা বিশ্বসমক্ষে তুলিয়া ধরেন; চেষ্টারের রবার্ট যাঁহার আল্-খোয়ারিজমির বীজগণিতের ইংরাজি অনুবাদ এখনও পাওয়া যায়।

মধ্যযুগের বীজগণিতের শ্রেষ্ঠ রচয়িতার নাম ফিবনাচ্চি যিনি এই বিষয়ে দুইটি গ্রন্থ, Liber Quadratorum (১২২৫) ও Flos রচনা করেন। প্রথমোক্ত গ্রন্থটিতে তিনি $x^2+y^2=z^2$ এবং এই জাতীয় সমীকরণের উল্লেখ করেন। এবং উহা সমাধানে তাঁহার বিরাট উদ্ভাবনীশক্তি প্রকাশ পাইয়াছে।

জার্মান বীজগণিত শাস্ত্রবিদ্গণের মধ্যে জরডনস নেমরারিয়স এর নাম সর্বাগ্রে উল্লেখ-যোগ্য। 'ডি নিউমেরিস্ ডাটিস' গ্রন্থে তিনি সরল ও দ্বিঘাত সমীকরণের নানান্ সমস্যার উত্থাপন করিয়াছেন এবং যাহা এখনও পাঠ্য পুস্তকে দেখা যায়। সাধারণভাবে বলা যায় মধ্যযুগীয় লেখকগণ সাধারণ গণিত অপেক্ষা জ্যোতির্বিজ্ঞান বিষয়ক গণিতে বেশী উৎসাহী ছিলেন।

—History of Mathematics by D. E. Smith
হইতে—কুমার মৈত্র কর্তৃক অনূদিত।

ত্রিমাত্রিক আয়তন

[এই আলোচনাটি ক্লিফোর্ড রচিত "The commonsense of exact sciences" গ্রন্থটি হইতে অনূদিত। মূল রচনাটি বয়সনির্বিশেষে সকলের চিত্ত আকর্ষণ করে। সামান্যতম খুঁটিনাটিগুলিকে উপেক্ষা না করিয়াও কঠিন বিষয়বস্তুর মাঝে, যে কতিপয় মনীষী স্বচ্ছতা আনয়নে সক্ষম, উইলিয়াম ক্লিফোর্ড তাহাদের অন্যতম। বার্টাণ্ড রাসেলকে পনেরো বৎসর বয়সে রচনাটি আকৃষ্ট করে এবং সাতান্ন বৎসর পরেও কৈশোরের সেই উদ্দীপনাকে তাঁহার অপচয় বলিয়া বোধ হয় নাই। মূল রচনার রাসেল লিখিত পূর্বাভাষে রাসেল এই কথা উল্লেখ করিয়াছেন। ভাষান্তরে রচনাশৈলীর সার্থক প্রতিফলন যদিও সম্ভব নয়, তবুও সাধ্যানুযায়ী ক্লিফোর্ডের অননুকরণীয় স্বচ্ছতার সঙ্গে পাঠকবর্গকে পরিচিত করার প্রচেষ্টাতেই এই অনুবাদের অবতারণা]

। সীমারেখা কোন স্থান অধিকার করে না।

জ্যামিতি একটি ভৌত বিজ্ঞান (physical science) বিশেষ। বস্তুর পরিমাপ, আকৃতিবিচার বা দুই বস্তুর দূরত্ব নির্ণয়ই ইহার বিষয়। সংখ্যার ক্ষেত্রে যেমন কয়েকটি সহজ ও সুস্পষ্ট পর্যবেক্ষণের বারংবার ব্যবহার আমাদের আরও অনেক কিছুর সন্ধান দেয়, এক্ষেত্রেও তেমনি কয়েকটি অতি সহজ ও সুস্পষ্ট পর্যবেক্ষণের বারংবার ব্যবহার দ্বারা আরও কিছু জ্ঞানসঞ্চয়ই আমাদের লক্ষ্য।

প্রয়োজনীয় পর্যবেক্ষণগুলি হইল :

প্রথমতঃ, আকার ও আয়তন পরিবর্তন না করিয়াই যে কোন বস্তুকেই স্থানান্তরিত করা যায়।

দ্বিতীয়তঃ, বিভিন্ন বস্তুর একই আকৃতি কিন্তু বিভিন্ন আয়তন হইতে পারে।

এই পর্যবেক্ষণগুলির সাহায্যে কোন সিদ্ধান্তে পৌঁছিবার পূর্বে, এগুলির অর্থ আরও সঠিক ভাবে বিচার করা প্রয়োজন।

বস্তু স্থান অধিকার করে। যেমন, কক্ষমধ্যস্থিত একটি টেবিল কক্ষের কিছু অংশ অধিকার করে এবং বাকী অংশ অধিকার করে না। এইভাবে বস্তুদ্বারা স্থান খণ্ডিত হয়।

এই দুই অংশের মাঝে যাহা বিদ্যমান, তাহাকেই টেবিলের তল বলা যায়।

মনে করা যাক, টেবিলের পার্শ্বস্থ সকল স্থান বায়ু পরিপূর্ণ। সেক্ষেত্রে টেবিলের তল বায়ু ও কাষ্ঠের মধ্যে অবস্থান করিয়া এই দুই বস্তুকে পরস্পর হইতে পৃথক করে, অথচ ইহা এই দুই বস্তুর কোনটিই নহে।

টেবিলের তলকে টেবিলের উপরিস্থিত কাষ্ঠের একটি অতি সূক্ষ্ম স্তর মনে করিলে ভুল হইবে। ইহার অসত্যতা অনায়াসে প্রমাণ করা যায়; কেননা, যে যুক্তি বলে আমরা উপরোক্ত সিদ্ধান্ত গ্রহণ করি, সেই যুক্তি দ্বারাই টেবিলের তলকে টেবিল সন্নিহিত একটি অতি সূক্ষ্ম বায়ুস্তরও বলা যাইতে পারে। প্রকৃতপক্ষে, টেবিলের তল, কাষ্ঠ ও বায়ু উভয়েই বিদ্যমান এবং ইহা কোনরূপ স্থান অধিকার করে না।

৭

আবার টেবিলের উপরিভাগের অংশবিশেষ বিভিন্ন বর্ণের হইতে পারে। সেক্ষেত্রে, টেবিলের তল বিভিন্ন বর্ণের হইবে।

এই কাগজের তলের উপর গোলাকার কালো একটি চিহ্ন রহিয়াছে। কালো অংশটিকে বৃত্ত বলা হয়। ইহা দ্বারা কাগজের তলটি দুইটি বিভিন্ন অংশে বিভক্ত হইতেছে। এক অংশে কালো চিহ্নটি বিদ্যমান, অপরাংশে বিদ্যমান নহে।

এই বৃত্তটি তলের কিছু অংশ অধিকার করিয়া আছে, যদিচ তলের নিজের ত্রিমাত্রিক কোন আয়তন নাই। অতএব আয়তনকে দুই ভাগে ভাগ করা যায়:

ত্রিমাত্রিক আয়তন: ইহাতে কঠিন বস্তুমাত্রই অবস্থিত এবং ইহার মধ্যে কঠিন বস্তু স্থান পরিবর্তন করে।

দ্বিমাত্রিক আয়তন: দুইটি দৃষ্টিকোণ হইতে ইহার বিচার সম্ভব। **প্রথমতঃ,** ইহা দুইটি সন্নিহিত ত্রিমাত্রিক আয়তনের সীমারেখা এবং ইহার নিজস্ব কোন ত্রিমাত্রিক আয়তন নাই।

দ্বিতীয়তঃ, ইহা নিজেই একপ্রকার আয়তন বিশেষ এবং যে কোন তলের অংশই এই আয়তন অধিকার করে।

এই অংশগুলিরও আবার আয়তন বর্তমান। বৃত্তের কালো অংশ এবং কাগজের সাদা অংশের মাঝে একটি রেখা বর্তমান। ইহাকে বৃত্তের পরিধি বলে। পরিধি নিজে কালো বা সাদা কোনটিরই অংশ বিশেষ নহে; কিন্তু ইহা উভয়ের মাঝে অবস্থিত। ইহা ঐ অংশ দুইটিকে বিভক্ত করে, কিন্তু ইহার নিজের কোন দ্বিমাত্রিক আয়তন নাই। তল যেমন কোন ঘনবস্তুর অতিসূক্ষ্ম স্তর নহে, তেমনি রেখাও তলের অতিসূক্ষ্ম অংশবিশেষ নহে।

কোন যুক্তিবলে যদি বলা হয় যে কালো বৃত্তটির সীমারেখা ঐ কালো অংশেরই অতিসূক্ষ্ম অংশ লইয়া গঠিত, তাহা হইলে ঐ একই যুক্তি প্রয়োগ করিয়াই বলা যায় যে বৃত্তটির সাদা অংশটির অতিসূক্ষ্ম অংশ দ্বারা সীমিত।

আমরা রেখাকেও দুইভাগে বিভক্ত করিতে পারি। এই কালো বৃত্তটি সমেত এই পৃষ্ঠাটি জলে এমনভাবে নিমজ্জিত করা হইল যেন কালো বৃত্তটির অংশবিশেষ জলের মধ্যে নিমজ্জিত থাকে। এক্ষেত্রে বৃত্তের সীমারেখাটির কিয়দংশ জলের ভিতর এবং কিয়দংশ জলের বাহিরে থাকে।

রেখাটির নিমজ্জিত অংশ কিছু স্থান অধিকার করে অর্থাৎ পরিধির চতুপার্শ্বস্থ স্থানের কিছু

অংশ ইহা দ্বারা অধিকৃত হয়। কাজেই ত্রিমাত্রিক ও দ্বিমাত্রিক ব্যতীত একমাত্রিক আয়তনেরও বিচার করিতে হইবে। রেখা দ্বারা তলের কিছুমাত্র স্থানও অধিকৃত হয় না; ইহা দুই পরস্পর সন্নিহিত তলের সীমারেখা মাত্র। ইহা দ্বারা ত্রিমাত্রিক আয়তন অধিকার করার সম্ভাবনা আরও কম। কিন্তু তবুও ইহার নিজস্ব আয়তন আছে। এই আয়তন খণ্ডিত করা যায় এবং খণ্ড খণ্ড রেখাগুলি দ্বারাই ঐ আয়তন অধিকৃত হইয়া থাকে।

এই খণ্ডগুলিও আবার সীমিত। পরিধির নিমজ্জিত অংশের দুই প্রান্তে দুইটি বিন্দু পরিধির নিমজ্জিত অংশ ও বাকী অংশের মাঝে সীমারূপে বর্তমান। এই বিন্দুগুলি জলের ভিতরে অবস্থিত নহে, আবার ইহারা জলের বাহিরেও অবস্থান করে না। ইহারা কালো বৃত্তটির পরিধিতে বা কাগজের সমতলে যেমন অবস্থিত তেমনই ইহারা জলের সমতলে বিদ্যমান। রেখা-মধ্যস্থ স্থানের বিন্দুমাত্রও ইহারা অধিকার করে না।

রেখা যেমন তলের সূক্ষ্ম অংশবিশেষ নহে, তেমনি বিন্দুও রেখার অতিসূক্ষ্ম অংশবিশেষ নহে। বিন্দুদ্বারা পরস্পর সন্নিহিত দুইটি রেখা খণ্ডিত হয় এবং রেখার মধ্যে কোন স্থান ইহা অধিকার করে না।

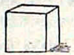
উল্লেখযোগ্য এই যে এখানে আমরা কোন মতবাদ বা কাল্পনিক ধারনা সম্বন্ধে আলোচনা করিতেছি না; আমাদের প্রাত্যহিক অভিজ্ঞতায় সাধারণ বস্তুগুলিকে সাধারণভাবে পর্যবেক্ষণ করিতেছি মাত্র।

প্রতিনিয়তই আমরা বিভিন্ন বস্তুর তল অবলোকন করিতেছি; ইহা দেখা যায় এবং অনুভব করা যায় এবং মাত্র সাধারণ জ্ঞান সম্বল করিয়াই পর্যবেক্ষণ দ্বারা বলা যায় যে কোন বস্তুর তল বস্তুটিতে এবং বস্তুর চারি পাশের শূণ্যে অর্থাৎ উভয়েতেই বর্তমান।

রেখা দ্বারা যে তল খণ্ডিত করা যায়, তাহাও আমাদের প্রাত্যহিক অভিজ্ঞতার ফল। একটি সূক্ষ্মতম দড়ির কল্পনাই রেখা নহে। একটি রেখা যে দুইটি তলকে বিচ্ছিন্ন করে, তাহাদের উভয়েতেই রেখাটি বর্তমান; কাজেই ইহার কিছুমাত্রও প্রস্থ বা উচ্চতা নাই—আমাদের এই ধারনা সাধারণ পর্যবেক্ষণের প্রত্যক্ষ ফল। বিন্দু সম্বন্ধেও একই কথা বলা যায়। পরিধির যে অংশ নিমজ্জিত তাহা অপর অংশ হইতে বিন্দু দ্বারা বিচ্ছিন্ন হয়—ইহা আমরা প্রত্যক্ষ করি। কোন বস্তুখণ্ডকে ক্রমাগত খণ্ডিত করিয়া আমাদের বিন্দু সম্বন্ধে সম্যক ধারণা জন্মে না। বিন্দু রেখার পরস্পর সন্নিহিত দুই অংশের সীমা নির্দেশ করে; আবার রেখা পরস্পর সন্নিহিত দুই তলের সীমা নির্দেশ করে; এই তল আবার পরস্পর সন্নিহিত দুই ত্রিমাত্রিক আয়তনের সীমা নির্দেশ করে। বিন্দু দৃষ্টিগ্রাহ্য ও বোধগ্রাহ্য; ইহা আমাদের কল্পনাজাত অসম্ভব কিছু নহে।

কাগজের উপর রেখা বা বিন্দু অংকনের ক্ষেত্রে আমরা জ্যামিতি বিশারদের ভাষা ব্যবহার না করিয়া নক্শা-অংকনকারীর ভাষাই ব্যবহার করি। নক্শা-অংকনকারীর ভাষায় আমরা যাহাকে রেখা বলি, সেই প্রকার রেখার দ্বারাই এখানে একটি ঘনক অংকিত রহিয়াছে। তথাকথিত এই রেখাগুলি বিভিন্ন প্রস্থের কয়েকটি মুদ্রিত কালো লম্বা দাগ। ইহারা কাগজের

কিয়দংশ অধিকার করে। এই প্রকার 'রেখা' উপযুক্তরূপে সন্নিহিত করিয়া সমগ্র কাগজটি, তাহা যত বড়ই হোক, পূর্ণ করা যায়। এই প্রকার প্রত্যেকটি লম্বা দাগের প্রতি পার্শ্বেই একটি করিয়া রেখা বর্তমান; এই রেখাগুলি কালো অংশটিকে সাদা অংশ হইতে পৃথক করে।



ইহারা তলের কোন অংশ অধিকার করে না এবং ইহারাই প্রকৃত জ্যামিতিক রেখা। লম্বা দাগগুলির সীমারেখার মাঝেই লক্ষ লক্ষ এইরূপ রেখা অংকিত করা সম্ভব এবং এইরূপ দুইটি রেখার মাঝে আবার আরও লক্ষ লক্ষ রেখা অংকনের অবকাশ বর্তমান।

তবুও, জ্যামিতিক চিত্রাদি অংকনে এইরূপ কালো দাগগুলিকে রেখার প্রতীকরূপে ব্যবহার করা অত্যন্ত সুবিধাজনক। এক্ষেত্রে, কালো দাগগুলিকে রেখার প্রতীকরূপে গ্রহণজনিত বিভ্রান্তি অবসানের জন্য আমরা প্রথমেই একটি প্রচলিত রীতি অনুসরণ করিব। লম্বা দাগটি উল্লম্ব (vertical) হইলে অর্থাৎ উপর হইতে নিম্নাভিমুখী হইলে, ইহার দক্ষিণ পার্শ্বস্থ সীমারেখাটিই আমাদের উদ্দিষ্ট রেখা। অপর সকল ক্ষেত্রে রেখাটি লম্বা দাগটির ঊর্দ্ধ সীমারেখা বুঝিতে হইবে।

বিন্দুর ক্ষেত্রেও একই রীতি অনুসৃত হইবে। যখনই কাগজের উপরে আমরা বিন্দুর অবস্থান নির্দেশ করিতে চাই, তখনই আমরা অসম (irregular) একটি কালো ফুটকি অংকন করি। একটি রেখা দ্বারা ফুটকিটি সীমিত। সীমারেখার সর্বোচ্চ বিন্দুটির প্রতীকরূপেই আমরা ফুট্‌কিটি ব্যবহার করিব। যখন সীমারেখার উপর কয়েকটি বিন্দু একই উচ্চতায় থাকিবে, তখন ফুট্‌কিটি উহাদের মধ্যে সর্বদক্ষিণে অবস্থিত বিন্দুটিরই প্রতীক হইবে।

জ্যামিতিক চিত্রগুলির এই অর্থ নির্দ্ধারণের কোন বাস্তব মূল্য নাই। পাঠকবর্গ যাহাতে কালো ফুটকিগুলিকে জ্যামিতিক বিন্দু বা লম্বা দাগগুলিকে জ্যামিতিক রেখা বলিয়া ভুল না করেন, সেই উদ্দেশ্যেই এই আলোচনা করা হইল।

পরিবর্তন ব্যতিরেকেই দৈর্ঘ্য স্থান পরিবর্তন করিতে পারে।

প্রথমেই ত্রিমাত্রিক আয়তন সম্বন্ধে আমাদের প্রথম পর্য্যবেক্ষণটির অর্থ বিচার করিব। আকৃতি বা আয়তনের পরিবর্তন না করিয়া যে কোন বস্তুর স্থানান্তর সম্ভব—ইহাই প্রথম পর্য্যবেক্ষণটির বক্তব্য।

প্রথমেই আকৃতি বিচার করা যাইতে পারে। কোন বস্তুর পরিমাপের জন্য আমরা উহার উপরিস্থিত বিভিন্ন কয়েকটি বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় করি। উদাহরণস্বরূপ বলা যায় যে একটি টেবিলের মাপ নির্ণয় করিবার জন্যে আমরা টেবিলটির এক প্রান্ত হইতে অপর প্রান্তের বা এক কোণ হইতে বিপরীত কোণের বা সর্বোচ্চ বিন্দু হইতে সর্বনিম্ন বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় করি। দূরত্ব পরিমাপের জন্য একটি উপযুক্ত মাপকাঠি প্রয়োজন; একটি গজকাঠি বা এক টুকরা ফিতা মাপকাঠিরূপে

ব্যবহার করা যাইতে পারে। মাপকাঠি সহজে বহনযোগ্য হইবে এবং স্থানান্তরে উহার দৈর্ঘ্য অপরিবর্তিত থাকা আবশ্যক। এখন পরিমাপের জন্য মাপকাঠিটি নির্ণেয় দূরত্বের উপর স্থাপিত করিতে হইবে এবং মাপকাঠিটির কোন্ অংশের সহিত নির্ণেয় দূরত্বটি মিলিত হয় তাহা লক্ষ্য করিতে হইবে।

মাপকাঠিটির একই অংশের সহিত যদি কোন দুইটি দৈর্ঘ্য বা দূরত্ব মিলিত হয়, তখন তাহাদের সমদৈর্ঘ্য বা সমদূরত্ব বলা হইবে। অনুরূপভাবে, একটি টেবিলের উপর মাপকাঠিটি স্থাপন করিয়া উহার প্রস্থ মাপকাঠিটির যে অংশের সহিত মিলিত হয়, তাহা চিহ্নিত করা হইল; এখন যদি অপর কোন টেবিলের প্রস্থ ঐ মাপকাঠির চিহ্নিত অংশের সহিত মিলিত হয়, তাহা হইলে টেবিল দুইটির প্রস্থ সমান বলা হইবে। মাপকাঠি হিসাবে ফিতার ব্যবহার যদিও সুবিধাজনক, তথাপি ইহা পরিমাপণের জন্য একান্ত আবশ্যক নহে। একটি টেবিলের উপর অপর টেবিলটি সমপাতিত করিয়া প্রস্থদ্বয়ের সাম্য প্রমাণ করা যাইতে পারে। অথবা সাধারণ ভাবে বলা যায় যে দুইটি দৈর্ঘ্য বা দূরত্বকে পরস্পর সন্নিহিত করিলে কোন পরিবর্তন ব্যতিরেকেই যদি একটি অন্যটির সহিত সর্ব্বতোরূপে মিলিত হয়, তবে উহারা সমদৈর্ঘ্য বা সমদূরত্ব হইবে। কিন্তু টেবিল অপেক্ষা ফিতার ব্যবহার সুবিধাজনক, কারণ ফিতাটি সহজে বহন করা যায়। এই জন্য কার্যক্ষেত্রে একই ফিতার আপেক্ষিকে দুইটি প্রস্থের সাম্য নির্দ্ধারিত হয়। সমান দীর্ঘ দুইটি বস্তু, ফিতার একই দৈর্ঘ্যের সমান হয়। কারণ, দুইটি দৈর্ঘ্য অপর একটি দৈর্ঘ্যের সমান হইলে উহারা পরস্পর সমান হইবে—ইহা আমরা স্বীকার করি। অথবা অন্যভাবে বলা যায় যে যদি একটি কিতা একটি আবৃত বক্ররেখাকে (closed curve) বেষ্টিত করে এবং পরে আবার পূর্বের আকার প্রাপ্ত হয়, তবে উহার দৈর্ঘ্য কোনরূপে পরিবর্তিত হইবে না।

ইহা কিরূপে সম্ভব? মনে করি, পরিমাপণের জন্য ব্যবহারের পূর্বে ফিতাটির একটি প্রান্ত চিহ্নিত করিয়া বোর্ডের উপর আকর্ষিত (stretched) অবস্থায় রক্ষিত হইল। এক্ষেত্রে, চিহ্নিত প্রান্তটি হইতে পরিমাপ করিয়া দুইটি বস্তুর সমদীর্ঘ হওয়ার অর্থ আমরা জানি। এখন, উদাহরণ স্বরূপ তিনটি টেবিল ক, খ, গ লওয়া হইল। মনে করি, পরিমাপের সাহায্যে আমরা জানি যে 'ক' এর প্রস্থ 'খ' এর প্রস্থের সমান এবং 'খ' এর প্রস্থ আবার 'গ'-এর প্রস্থের সমান। ইহার অর্থ হইল এই যে আমরা 'ক' এর প্রস্থের সমান অংশ ফিতাটিতে চিহ্নিত করিয়া দেখিলাম যে চিহ্নিত অংশ 'খ' এর প্রস্থের সমান; ইহার পর ঐ একই দৈর্ঘ্য 'গ'-এর উপর সমপাতিত করিয়া প্রত্যক্ষ করা হইল যে 'গ'-এর প্রস্থও উহার সমান। 'গ'-এর প্রস্থ 'ক'-এর প্রস্থের সমান বলিতে বুঝায় যে 'গ' পরিমাপ করিয়া ফিতাটি 'ক'-এর উপর স্থাপিত করিলে দেখা যাইবে যে, 'খ'-এর উপর ফিতাটি সমপাতিত করা হউক বা না হউক, 'ক' ও 'গ'-এর প্রস্থদ্বয় ফিতাটির সমান সমান অংশের সহিত সমান হইবে। অর্থাৎ যদি একবার 'ক' ও 'গ'-এর প্রস্থদ্বয় সমান হয়, তাহা হইলে 'ক' হইতে 'খ', 'খ' হইতে 'গ' ও আবার 'গ' হইতে 'ক' এ প্রত্যাবর্তন করিলেও 'ক'-এর প্রস্থ আবার 'গ'-এর প্রস্থের সমান অংশের ফিতার সহিত সমান হইবে।

এই বিচার বিবেচনাগুলি হইতে আমরা একটিমাত্র সিদ্ধান্তে উপনীত হইতে পারি। পাঠকবর্গ

বোধহয় লক্ষ্য করিয়া থাকিবেন যে দৈর্ঘ্য বা দূরত্বের সংজ্ঞা নিরূপণ কালে আমরা যে মাপকাঠির উল্লেখ করিয়াছি স্থান পরিবর্তন করিলেও তাহার দৈর্ঘ্য অপরিবর্তিত থাকে। মাপকাঠির এই বিশেষত্ব কি ভাবে পরীক্ষিত হইবে? একটি গজ কাঠির আপেক্ষিকতায় আমরা ফিতার পরিমাপ করিতে পারি। কিন্তু তাহা দ্বারা আমরা দৈর্ঘ্যের ধ্রুবতা প্রমান করিতে পারি না। একটির সমান অংশ অপরটির সমান অংশের সহিত মিলিত হইলে দৈর্ঘ্যদ্বয়ের সাম্য প্রমাণিত হয় মাত্র।

প্রকৃত পক্ষে বস্তুর স্থানান্তর হইলে উহার দৈর্ঘ্য পরিবর্তিত হয় ধরিলেও আমাদের বক্তব্য অবিকৃত থাকে, যদি—

(১) বিভিন্ন বস্তুর পরিবর্তন একই হয় এবং (২) যে কোন বস্তুর স্থানান্তর ঘটাইয়া তাহা আবার তাহার পূর্ব অবস্থানে আনিলে উহা পূর্বের আয়তনই গ্রহন করে। আসলে প্রয়োজনীয় সর্ত হইল যে বিপরীত কোন কারণ না থাকিলে যে কোন দুইটি বস্তু যদি একবার পরস্পরের সমান হয়, তবে তাহাদের বিভিন্ন পথ দিয়া অপর কোন স্থানে আনিলেও তাহারা পরস্পরের সমান হইবে। যে কোন একটি লাঠি লণ্ডনে ফিতার যে অংশের সমান হইবে, লাঠিটি আটলান্টিক দিয়া এবং ফিতাটি ভারতবর্ষ হইয়া প্রশান্ত মহাসাগর দিয়া নিউইয়র্ক যাইলেও সেখানে লাঠিটি ফিতাটির সেই একই অংশের সমান হইবে। অবশ্য লাঠিটির দৈর্ঘ্য আর্দ্রতার জন্য প্রসারিত হইতে পারে বা শুষ্কতার জন্য ফিতাটি সঙ্কুচিত হইতে পারে। কিন্তু এই পরিবর্তন জ্যামিতিক নয় এবং ইহা বিচার বহির্ভূত। কেবল জ্যামিতিক সর্তগুলি বিচার করিলে দেখা যায় যেকোন দুইটি বস্তু কোন একস্থানে যদি পরস্পরের সমান হয়, তবে স্থানান্তর সত্বেও তাহারা আবার পরস্পরের সমান হইবে।

আমাদের দৈর্ঘ্য সম্বন্ধে ধারনা এবং কোন নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্যের সহিত অপর দুইটি দৈর্ঘ্য সমান হইলে তাহারা পরস্পর সমান হইবে, এই সিদ্ধান্তটি, এই সত্যের উপরই প্রতিষ্ঠিত।

কিন্তু মাত্র স্থান পরিবর্তনের ফলেই আমাদের অজ্ঞাতে দৈর্ঘের পরিবর্তন কি সম্ভব?

গভীর ভাবে চিন্তা করিলেই বিষয়টি অর্থহীন বলিয়া প্রতীয়মান হয়। কিন্তু ঐ সিদ্ধান্ত গ্রহণের জন্য যে সময় ব্যয় করা হইয়াছে, তাহাকে একেবারেই অপব্যয় বলা যায় না।

রচনা: উইলিয়াম কিংডন ক্লিফোর্ড
অনুবাদ: অসীম চট্টোপাধ্যায়।

কার্দানো

১৫০১—১৫৭৬

মধ্যযুগের কুসংস্কার আর অর্থহীন আচারের বেড়াজাল ভেঙ্গে, সাহিত্যে, বিজ্ঞানে, বানিজ্যে নতুন প্রাণের স্পন্দন এসে 'রেনেসাঁ' নব জাগরণ উৎসারিত হ'ল ইটালী দেশে, তারপর ছড়িয়ে পড়লো ইউ-রোপের প্রত্যন্তে। 'আত্মার মুক্তি' প্রার্থী অশিক্ষিত মধ্যযুগের সেই ভূমি-দাসদের পরিবর্তে সমাজ জীবনে এল শক্তিময় তেজময় আশাবাদী মাটির মানুষ। তাই মাটির দিকে, আকাশে নয়, ফিরল মানুষের দৃষ্টি, এখানেই খুঁজল সে অমৃতত্ব। এল জীবন জিজ্ঞাসা—অজানাকে জানার, অদেখাকে দেখার আকুল আগ্রহে অভিযাত্রীরা যাত্রা করলো অনির্দেশে; জীবন বিপন্ন করলো সোনার আর তারুণ্যের উৎস সন্ধানে; রাসায়নিক 'জীবন-রস' এর পাক অন্যধাতুকে সোনা করার চেষ্টা করল আর ধনীরা অজানা ভবিষ্যতের জন্য তৈরী করল—নিজেদের চিত্রিত খোদিত মূর্তি।

এ যুগেরই মানুষ জিরোলামো কার্দানো যুগোত্তম। পার্থিব অমৃতত্বের আকাঙ্খাই ছিল তাঁর সমস্ত কাজের উৎস—তাঁর জীবন-বেদ, যশলোভে প্রাচীন গ্রীকরা যেমন দেবী ডায়নার মন্দির পুড়িয়ে দিয়েছিল তেমনি কার্দানো চেয়েছিলেন ভবিষ্যতের পাতায় নাম রাখতে; মূল্যায়নে তাঁর স্থান যেখানেই হোক না কেন। জীবদ্দশায় তাঁর একথা বিশ্বাস করার সংগত কারণ ছিল যে তাঁর উচ্চাকাঙ্ক্ষা পূর্ণ হবে কারণ একাধারে তিনি ছিলেন ইউরোপের অন্যতম বিলাসী চিকিৎসক, সুপরিচিত গণিতজ্ঞ ও জ্যোতিষী (ষোড়শ শতকে জ্যোতিষচর্চা সমাজ স্বীকৃত পেশা ছিল) এবং সমকালীন সবচেয়ে বেশী পড়াশোনা করা বৈজ্ঞানিক লেখক। রাজা আর কার্ডিনালদের তিনি চিকিৎসা করেছেন, রাজকুমার আর পোপেদের জন্য অপরিমিত সৌভাগ্য ছুঁড়ে ফেলেছেন, গণিত বিষয়ে মৌলিক রচনা প্রকাশ করেছেন আর মোট চারশ'র বেশি বই লিখেছেন এর মধ্যে দেড়শ বই ছাপা হয়েছে। চিকিৎসা বিজ্ঞান আর গণিতের ইতিহাসে আজ তাঁর নাম পাদটীকায় স্থান পায় আর তাঁর লেখার প্রায় কিছুই পড়া হয় না।

তবুও নবজাগরণের সূচনায় গণিতজ্ঞদের, তত্ত্বে নতুনত্ব না এনে গণিত পুনরুদ্ধার করাই যাঁদের মুখ্য অবদান, তিনিই তাঁদের মূর্ত প্রতীক। একমাত্র একারণেই কার্দানো সকলের মনোযোগ আকর্ষণ যোগ্য।

আর্কিমিডিসের পর থেকে ইউরোপে গণিতের বিস্তৃতি উল্লেখযোগ্য নয়। এর শেষ বিকাশ দেখা গিয়েছিল আলেকজান্দ্রিয়ার দিগন্তে, যখন পৃথিবীর ব্যাস আর চন্দ্র-পৃথিবীর দূরত্ব গণিতজ্ঞরা গণনা করেছিলেন। পরবর্তী পাঁচ শতাব্দীর বাস্তববাদী রোমান সাম্রাজ্যে সেই পাণ্ডিত্য শ্বাসরুদ্ধ হল—গণিতের আর বিস্তার হ'ল না। পতন হল রোমের—বিরাট কীর্তির বিপুল ধ্বংস! গিবন

তাঁর 'ডিক্লাইন অ্যাণ্ড ফল অফ্ দি রোমান এম্পায়ার'এ বলেছেন পোপ 'ইউজিনিয়াস'-এর রাজত্ব কালে দুজন পরিচালক রোমের ক্যাপিটোলাইন পাহাড়ে উঠে দেখেছিল……কাঁটাগাছ আর আগাছার ঝোপে সেই পূত মৃত্তিকা বিকৃত……আঙ্গুরলতায় নিশ্চিহ্ন হয়েছে 'বিজয় সরণী', আর আবর্জনার স্তূপে লুকিয়েছে সেনেটরদের আসন……রোমানদের 'ফোরাম' এখন হয় রান্না বাড়ীর বাগানের জন্য ঘেরা নয় তো শুয়োর মোষদের অভ্যর্থনার জন্য। অনন্তকালের জন্য নির্মিত মূর্তিগুলো অস্থির মত নগ্ন ভগ্ন অবস্থায় মাটিতে পড়ে আছে; এই ছিল রোমের অবস্থা, ইউরোপের বাকি অংশের অবস্থা আরও খারাপ। কেবলমাত্র পূর্বদিকে তুরস্কে আর ভারতে জ্ঞানরশ্মি জলছিল। কনস্তানতিনোপল গ্রীক শিক্ষাকে ধরে রেখেছিল বাড়াতে পারেনি। ভারতবর্ষে অবশ্য গণিতের বিকাশ সাধনে তিনটি বিশিষ্ট পদক্ষেপ চলছিল।

আমাদের বর্তমান সংখ্যা পদ্ধতি প্রস্তুত হল। শূন্যসহ এই দশটি সংখ্যার দ্বারা যে কোন সংখ্যা সহজেই পরিষ্কার ভাবে প্রকাশ করা যায়। এই আবিষ্কারের গুরুত্বের মূল্যায়ন অসম্ভব। এটি ছাড়া গণিত আর অগ্রসর হতে পারত না। ঋণাত্মক সংখ্যা গ্রহণের জন্য সংখ্যা ক্ষেত্রের বিস্তার দ্বিতীয় বিশেষ পদক্ষেপ।

তৃতীয়টি হল বীজগণিত আবিষ্কার। বিভিন্ন প্রক্রিয়া বোঝাবার জন্য সংকেত চিহ্ন আবিষ্কৃত হল যোগ, বিয়োগ ইত্যাদি এবং অজানা সংখ্যার পরিবর্তে শূন্য ব্যবহার করে সহজ সরল এবং বর্গ সমীকরণের অজানার রহস্য ভেদ হল।

নবম এবং দশম শতকে ভারতবর্ষের গণিত আরব দেশে বিস্তৃত হল আর এখানেই আরও বিকাশ লাভ করল। পাশ্চাত্য জগতে 'রুবাইয়াৎ' এর লেখক হিসাবে পরিচিত ওমর খৈয়াম্ আরবের প্রসিদ্ধ গণিতজ্ঞদের অন্যতম। ভারতবর্ষের গণিত শিক্ষা তিনি কেবল গ্রহণই করলেন না যুক্ত করলেন তাঁর নিজস্ব চিন্তা। বীজগণিত ও জ্যামিতিকে যুক্ত করার জন্য তিনি 'গ্রাফ' এর ব্যবহার চালু করলেন এমনকি বাইনোমিয়েল উপপাদ্য নিয়ে কাজ করে কয়েক শতাব্দীর অন্তরালে ডেকার্তে ও নিউটনের আগমন প্রত্যাশিত করলেন।

ইউরোপ তখনও অন্ধকার যুগে রয়েছে। ক্রুসেডের আগে পর্যন্ত আরবদের জ্ঞান ইউরোপে প্রবেশ করেনি। পিসার বিশিষ্ট জ্ঞানী লিওনার্দো ফিবনোচচি ১২০২ সালে ইটালীতে বীজগণিত ও আরবীয় সংখ্যা চালু করলেন। এই নতুন সংখ্যা পদ্ধতির ব্যবহারের বিরুদ্ধে সর্বত্র বিপুল প্রতিরোধ দেখা দিল, কোথাও কোথাও আরবী সংখ্যা ব্যবহার আইনত নিষিদ্ধ হল। অবশ্য ক্রমে ক্রমে রোমান সংখ্যা আরবী সংখ্যাদের স্থান ছেড়ে দিল, কেবল মাত্র স্তম্ভ ও প্রাসাদ শীর্ষে আজও তারা বিরাজমান।

চতুর্দশ ও পঞ্চদশ শতকে রেনেশাঁর উজ্জ্বল রঙীন জীবন্ত প্রজাপতি তার অন্ধকার নিষ্প্রাণ গুটি থেকে হাজার বছরের ঘুম ভেঙ্গে আস্তে আস্তে বাইরে এল। আরবী শিক্ষা দৃঢ়মূল হল; নতুন বিশ্ববিদ্যালয়ে শেখানো শুরু হল সেই শিক্ষা। ১৪৫৩ সালে তুর্কীরা কনস্তান্তিনোপল্ দখল করল। দারিদ্র্য ও তুর্কী-বিতাড়িত গ্রীক গণিতজ্ঞরা সেখান থেকে ইউরোপে আশ্রয় নিলেন। বাণিজ্যের

প্রসারের সংগে সংগে এবং হিসাব ও খাতাপত্র ঠিক রাখার তাগিদে 'সংখ্যা'র প্রতি অনুরাগ বাড়ল।

১৫০১ এবং রেনেশাঁ এগিয়ে চলেছে। উত্তর ইটালীর প্রাণবন্ত নগর মিলান এর অনতিদূরে একটা ছোট শহরে ২৪শে সেপ্টেম্বর "অর্ধমৃত" জিরোলামো কার্দানো জন্ম নিলেন। তাঁর নিজের কথায় "উষ্ণ আসব স্নানে আমি বেঁচে উঠলাম।" এবং গ্রহ নক্ষত্রের অবস্থানের জন্য "আমার একটা দানব হয়ে জন্মানর কথা।" তা না হয়ে সামান্য অক্ষম হয়ে তিনি বেঁচে গেলেন।

পিতা ফাজিও পেশায় উকিল হলেও "অপূর্ব কুশলী ও প্রতিভাবান" গণিতজ্ঞ হিসাবে প্রসিদ্ধি লাভ করেন। শোনা যায় লিওনার্দো দ্যা ভিঞ্চি হয়ত জ্যামিতি সম্পৃক্ত সমস্যা পারমপর্য নিয়ে তাঁর সংগে পরামর্শ করেছিলেন। প্রসিদ্ধি থাকার পরিপ্রেক্ষিত সত্ত্বেও বিত্ত অর্জনের ক্ষেত্রে তিনি সফল হতে পারেননি। সাংসারিক জীবন তাই সুখের ছিল না। মাঝে মাঝে স্ত্রীর সংগে থেকেছেন হয়ত তাঁকে প্রতিপালন করতে তিনি সমর্থ হননি একারণে প্রতিবেশীরা অবশ্য তাঁদের বিবাহে সন্দেহ প্রকাশ করত।

পিতার কাছেই কার্দানো আইন ও গনিতের প্রথম পাঠ নিলেন। পিতার বালক অনুচর হলেন। জীবনে আইনজ্ঞ হবেন এ সিদ্ধান্ত দৃঢ় হল। কাজের চাপ অসহ্য হল জিরোলামোর পক্ষে। অসুস্থ হয়ে পড়ায় তের বছর বয়সে কাজ থেকে মুক্তি পেলেন।

দুঃখ এবং দুর্ভাগ্য ভরা শৈশব নিয়ে কার্দানো গর্ব করতে পারেন। প্রায়ই অসুস্থ থাকতেন আর বদরাগী বাবা মা সামান্যতম অবাধ্যতায় তাঁকে চাবুক মারতেন। এটা বন্ধ হল যখন তাঁর বয়স সাত। চাবকানোর ফল ভাল হয়েছিল কিনা কার্দানো কিছু বলেন না।

কৈশোরেই যশ লাভের আকাঙ্খা তাঁর মধ্যে প্রকট হয়। তাঁর এক অন্তরঙ্গ বন্ধুর মৃত্যু জীবনের ক্ষণস্থায়ীত্ব সম্পর্কে তাঁকে সচেতন করে। খ্যাতি অথবা উত্তরাধিকারী এ ছাড়া মানুষ আর কি রেখে যেতে পারে? তাঁর বন্ধুর উত্তরাধিকারী ছিলনা তাই কয়েক মাসের মধ্যেই তার নামও আর উল্লেখিত হল না।

তাঁর জীবনে এ ঘটনা না ঘটার ব্যবস্থা কার্দানো করলেন। উত্তরাধিকার সূত্রে পেলেন "দারিদ্র্য আর অবহেলা;" না ছিল বিত্ত না ছিল শিক্ষা, দেহ দুর্বল আর ছোট। যশ দূরের কথা অখ্যাতির জন্যও ঐসব পর্যাপ্ত নয়। ভালর দিকে ছিল প্রখর মন আর 'অবিকল্প উচ্চাকাঙ্খা'। আত্মজীবনীতে তিনি পরিষ্কার বলেছেন "লোকে আমাকে ভাবে সুযোগ সন্ধানী।" পিতা চেয়েছিলেন পুত্র হবে আইনজ্ঞ—কিন্তু আইন পিতাকে যা দিয়েছে তার কথা ভেবে কার্দানো সিদ্ধান্ত করলেন পৃথিবীতে নাম রাখতে হলে চিকিৎসা বিজ্ঞানই তাঁর পথ। তিনি হবেন চিকিৎসক।

তাঁর সিদ্ধান্ত, স্বাভাবিক পারিবারিক কলহের সৃষ্টি করল, মা শিয়ারা মিশিনা, ছেলের পক্ষে। প্লেগে প্রথম তিনটি সন্তানকে হারিয়ে প্রিয় জিরোলামোর জন্য সর্বোৎকৃষ্ট ব্যবস্থা চাইলেন। স্বামী মত না দেওয়া পর্যন্ত স্বভাবত "স্থূলকায়া, ধর্মপ্রাণা, চকিত স্বভাব" মহিলাটি তর্কের ঝড় বইয়ে দিলেন।

'পাভিয়া'র স্থানীয় আকাদেমীতে উনিশ বছর বয়সে তিনি ভর্তি হলেন। কিছুকাল পরে অসাময়িক গোলযোগে প্রতিষ্ঠানটি বন্ধ হওয়ায় পাদুয়া বিশ্ববিদ্যালয়ে প্রবেশ করলেন। এখানে তিনি প্রথম জয়মাল্য পেলেন। সম্পূর্ণ অবৈতনিক রেক্টর পদে নির্বাচিত হলেন এবং তার্কিক হিসাবে খ্যাতি লাভ করলেন। বিশেষ বাগ্মিতা দিয়ে নয় "একটা উৎকৃষ্ট এবং আদর্শ যুক্তি" দিয়ে প্রতি-পক্ষের সবাইকে তিনি পরাস্ত করেছেন এটাই ছিল তাঁর বিনীত দাবী। পাছে ইতিহাস তাঁকে তাঁর প্রাপ্য থেকে বঞ্চিত করে তাই তিনি আরও বলেছেন "আমি এমনি অনন্য চতুর ছিলাম যে আমার অসাধারণ পটুতায় প্রত্যেকে স্তম্ভিত হত"—তাই কেউ তাঁর সংগে তর্ক করতে চাইত না।

উপাধি প্রাপ্তির পর আত্মমগ্ন তরুণ চিকিৎসক মিলানে ফিরে এসে পেশাগত ছাড়পত্র চাইলেন। জন্মগত কারণে এই ছাড়পত্র তিনি পেলেন না। স্থিত হলেন পাদুয়ার কাছে ছোট্ট সহর সাকোয়। জীবনের মধুরতম দিনগুলো এখানেই কাটালেন। বিবাহ করলেন স্থানীয় লুসিয়া বান্দারিনিকে—মরজগতে নিজেকে অমর করার জন্য জন্ম দিলেন তিনটি সন্তানের—জিয়ামবাতিস্তা, শায়ারা আর আলদো।

গোপনে অধ্যাপনা ও চিকিৎসা করে আংশিকভাবে আর বেশির ভাগটাই—বিশ্ববিদ্যালয়ে থাকাকালীনও জুয়া খেলে তিনি অর্থ উপার্জন করতেন। এইভাবে তিনি সংসার চালাতেন। পাশার দান ফেলছেন না বা তাস ভাঁজছেন না এমন দিন দেখা যায়নি। খেলার বৈধ অবৈধ সমস্ত রকম চাতুরীই তাঁর জানা ছিল। যদিও তিনি বলেন যে কোন দিনই তিনি অবৈধ উপায় গ্রহণ করেননি। তাঁর ক্রমাগত জয়ের মূলে ছিল সৌভাগ্য আর আংকিক হিসাব জ্ঞান। পরবর্তীকালে তিনি বলেছেন যে আর্থিক প্রয়োজনেই তিনি জুয়া খেলতে বাধ্য হয়েছিলেন তবুও, আর্থিক দুর্গতি শেষ হবার পরও তিনি জুয়া খেলেছেন।

সাকোয় থাকাকালীন পাভিয়া বিশ্ববিদ্যালয়ে চিকিৎসা বিভাগে অধ্যাপনা করার জন্য তিনি আমন্ত্রিত হয়েছিলেন কিন্তু অর্থ প্রাপ্তির কোন সম্ভাবনা না থাকায় সে প্রস্তাব তিনি প্রত্যাখ্যান করেন।

মিলান এর চিকিৎসক সংস্থা, সংস্থার পেশাগত ছাড়পত্র পাওয়ার জন্য কার্দানোর তৃতীয় আবেদন মঞ্জুর করলেন। এর মূলে ছিলেন মিলান এর এক প্রতিপত্তিশালী ব্যক্তি যার ছেলেকে কার্দানো মৃত্যুমুখ থেকে রক্ষা করেন।

কার্দানোর পেশা শুরু হল। তাঁর বয়স তখন আটত্রিশ। দু'বছরের মধ্যেই মিলান এর শ্রেষ্ঠ চিকিৎসকদের অন্যতম বলে পরিচিত হলেন। বিশ্ববিদ্যালয়ে বক্তৃতা দিলেন, গণিত চর্চা আবার শুরু করলেন, পুস্তক আকারে প্রকাশ করার জন্য নিজের লেখা কাগজপত্র ঠিক করে নিলেন আর পরবর্তীকালের মিলানএর আর্চবিশপকে পেলেন পৃষ্ঠপোষক।

ভাগ্যের চাকা ঘুরে গেল। অর্থ, যশ, সম্মান, প্রতিপত্তি চাঁদের কলার মত বাড়তে লাগল। শুরু হল অমৃতত্বের চিন্তা-রোমন্থন। ছেলেবেলায় অলৌকিক ভাবে মৃত্যুর হাত থেকে

বেঁচেছিলেন কয়েকবারই। তাই ধারণা হল কোন ঐশ্বরিক শক্তির প্রভাব আছে তাঁর জীবনে। সক্রেটিস সহ আরও বহু বিখ্যাত ব্যক্তির জীবনে এই অপ্রাকৃত শক্তির পরিচয় পাওয়া যায়। "সত্য আর জ্ঞানের প্রতি অসীম অনুরক্তি" "ন্যায়বিচারানুরাগ" আর "সমস্ত গৌরব ঈশ্বরে সমর্পণ" ইত্যাদি কারণেই কার্দানোর ধারণা হল তিনি ঈশ্বরাভিপ্রেত।

বিজ্ঞানের প্রচার-প্রসার প্রয়াসী ও বৈজ্ঞানিক যুক্তিবাদী একজন শিক্ষিত লোক কিভাবে এরকম সংস্কারাচ্ছন্ন হয় তা বুদ্ধির অগম্য। হতে পারে সমকালীন দেশ কাল কুসংস্কারাচ্ছন্ন; রাজপ্রাসাদে রাজপ্রাসাদে জ্যোতিষীদের দৃঢ় অধিষ্ঠান, কিন্তু কার্দানো যে সমস্ত ব্যাপারে বিশ্বাস করতেন তা সাধারণ জ্যোতিষীরও হাসির খোরাক হবে। তিনি বলেছেন যে তাঁর জীবনের প্রতিটি গুরুত্বপূর্ণ ঘটনার পেছনে ছিল কোন অদ্ভুত স্বপ্ন বা কুকুরের একটানা চীৎকার বা আগুনের ঝিলিক বা দাঁড় কাকের ডাক বা মুরগীর ডাক ইত্যাদি ইত্যাদি। উদাহরণ স্বরূপ তিনি বলেছেন অপূর্বদৃষ্ট একটি মেয়েকে তিনি একদিন স্বপ্নে দেখেছিলেন। এবং এক সপ্তাহ পরে স্বপ্নদৃষ্ট মেয়েকে তিনি রাস্তায় দেখেন। কিছুকাল পরে সেই মেয়েটির সংগে তাঁর বিবাহ হয়। তাঁর প্রথম পুত্রের নামকরণের দিন মাতাপুত্রের শয়ন কক্ষে একটি বোলতা ঢুকে ছেলেকে প্রদক্ষিণ করে, শেষে পর্দায় আটকে যায়। পরবর্তীকালে পুত্রের জীবনের পরিনতি তাঁকে এই ঘটনার কথা মনে করিয়ে দিয়েছে। লোকে যখন তাঁর সম্পর্কে কথা বলত তখন তাঁর কান বন্ধ হয়ে যেত। প্রশংসা করলে তাঁর ডান কান আর নিন্দা করলে বাঁ কান বন্ধ হয়ে যেত। তিনি আরও বলেছেন যে হঠাৎ চমক লাগার মধ্যে দিয়েই তিনি সমস্ত বিশেষ জ্ঞান লাভ করেছেন। বিদ্যালয়ে ছাত্রাবস্থায় যখন তিনি ল্যাটিন ভাষা জানতেন না, তখন একদিন সুন্দর সোণালী রঙে বাঁধান একটা ল্যাটিন ভাষার বই কেনেন তার পর দিনই হঠাৎ তিনি ল্যাটিন ভাষায় রপ্ত হয়ে গেলেন।

কার্দানোর গল্প আর অদ্ভুত ঘটনা আরও অনেক আছে। কিন্তু মহাপুরুষ বা বিদগ্ধজনের মাথায় বা মনে এ জাতীয় ছদ্মবৈজ্ঞানিক অর্থহীন চিন্তা থাকে কিন্তু সেটা তাঁর বৈজ্ঞানিক চিন্তা-ভাবনাকে নস্যাৎ করে দিতে পারে না। আর কার্দানোর অবদান যথেষ্ট মূল্যবান। কেবল গণিত বিষয়েই তিনি একুশটি বই লিখেছেন - এর মধ্যে আটটি প্রকাশিত হয়েছে। তাঁর লেখা আরস্ ম্যাগনা (Ars Magna) জ্যামিতির সম্পর্কে ষোড়শ শতকের সর্বশ্রেষ্ঠ বই।

কার্দানো যখন পাঠ শুরু করেন তখন জ্যামিতি বিস্তৃতি লাভ করেনি। আলেকজান্দ্রিয়ানরা জ্যামিতিকে যেখানে ছেড়ে দিয়েছিল জ্যামিতি সেখানেই ছিল। বীজগণিত অবশ্য আরবদের স্থগিত চিন্তা থেকেও বড় হতে শুরু করেছিল এবং যাঁরা এই প্রক্রিয়ায় সাহায্য করেছিলেন কার্দানো তাঁদের অন্যতম। তখনকার বীজগণিতের গ্রীক আমলের জ্যামিতির মত সৌন্দর্য ও সূক্ষ্মতা ছিল না। গণিতের আর ধাঁধার সমস্যা মেটাবার জন্য বীজগণিত কেবল কয়েকটা সাধারণ সূত্রের সমষ্টি মাত্র।

জ্যামিতি মানুষের চিন্তা-ভাবনাকে নিয়ে গেছে পৃথিবী ছাড়িয়ে অতলে, নিঃসীম শূন্যে। বীজগণিত কিন্তু দৈনন্দিন প্রয়োজনের রুটীমাখন। অনির্দিষ্ট ভাবে বেড়ে উঠেছে বীজগণিত কোন বিশিষ্ট সূত্রকে ভিত্তি না করে। এর যৌক্তিক ভিত্তির প্রয়োজনীয়তা উপলব্ধি না করেই মানুষ এর ব্যবহার করেছে, পরিপুষ্ট করেছে একে। জ্যামিতি যেন পরিকল্পিত শৃঙ্খলাভুক্ত ছেলে। তার পরিমিত কথা উল্লসিত করে মনকে। বীজগণিত যেন অনাদরে গড়ে ওঠা ছেলে। বাবা মা ওর দিকে তাকাবার সময়ই পাননি। তাই না আছে শৃঙ্খলাবোধ না আছে ভব্যতা। উনবিংশ শতক পর্যন্ত কেউ খেয়ালও করেনি যে জ্যামিতির মত বীজগণিতেরও সেই চাকচিক্য আর দ্যুতি নেই।

কার্দানো বীজগণিতের বিস্তারে সাহায্য করেন। গণিত বিষয়ক তাঁর একুশটি বই এর বেশির ভাগই ছিল জ্যামিতি, বীজগণিত ও সংখ্যাতত্ত্ব সম্পর্কে তৎকালীন জ্ঞানের সংক্ষেপসার। তাঁর 'আরস্ ম্যাগনা' সমকালীন অন্যতম শ্রেষ্ঠ গণিত পুস্তক। বীজগণিত নিয়ে চর্চা করা কালীন হঠাৎ ঘন সমীকরণের সমস্যার সমাধান সূত্রের আবিষ্কার তাঁর নজরে আসে। ষোড়শ শতকের আগে পর্যন্ত বীজগণিতের সাহায্যে কেবল সরল ও দ্বিঘাত সমীকরণ সমাধান করা যেত, যে সব সমীকরণে ঘন থাকত যেমন $x^3+x^2-4=0$ সেগুলোর সমাধান করা যেত না। জ্যামিতির সরল, তল ও ঘনের মধ্যে যে তফাৎ বীজগণিতে এই তিন সমীকরণের মধ্যে সেই তফাৎ।

১৫০৫ সালে বোলোনা (Bologna) সহরের স্কিপিও ফেরেয়াস ঘন সমীকরণ সমাধানের একক সূত্র পান। এই সূত্রটি তিনি আর একজনকে জানালেন। তখনকার দিনে কোন আবিষ্কার সাধারণ্যে প্রকাশ করা হত না—ব্যক্তিগত লাভের আশায় গোপন রাখা হত। গণিতজ্ঞরা আর্থিক পুরস্কারের জন্য একে অন্যকে গাণিতিক সমস্যা সমাধানের জন্য আহ্বান করতেন। এই গাণিতিক তর্ক যুদ্ধ নিউটনের পরবর্তী যুগেও লোকপ্রিয় ছিল এবং এর দ্বারাই প্রচুর অর্থ ও সম্মানের অধিকারী হতেন সার্থক গাণিতিক।

১৫৩৫ সালে ফেরেয়াস এর এক শিষ্য এক ধরণের ঘন সমীকরণ সমাধানের জন্য গাণিতিক তর্কে আহ্বান করলেন তোতলা নিকোলো তারতাগলিয়াকে; স্ব-শিক্ষিত তারতাগলিয়া এ আহ্বান গ্রহণ করলেন এবং ঘন সমীকরণ এর যে কোন সমস্যার সমাধান সূত্র উদ্ভাবন করলেন। পৃথিবীতে তিনিই একমাত্র ব্যক্তি যিনি এই বিষয়ে বিশেষভাবে জানেন তাই যে কোন বিরোধীকে তিনি পরাভূত করতে পারবেন।

১৫৩৫ সালে বোলোনার (Bologna) সাইপিও ফেরেয়াস একধরণের কিউবিক সমীকরণ সমাধানের সূত্র আবিষ্কার করেন। সে সময়ে বিশেষ জ্ঞান ব্যক্তিগত স্বার্থ ও প্রতিষ্ঠার জন্যই ব্যবহৃত হত। ফেরেয়াস আবিষ্কৃত সূত্রটি তাই তাঁর অনুগত একটি ব্যক্তির মন্ত্রগুপ্তির শপথ এর বিনিময়ে রূপান্তরিত হয়।

১৫৩৫ ফেরিয়াসের এক ছাত্র তোতলা বলে খ্যাত নিকোলো তারতাগলিয়াকে কিউবিক

সমীকরণের সেই বিশেষ সূত্রের 'গণিত দ্বন্দ্ব' এ আহ্বান করেন। তারতাগলিয়া আহ্বান গ্রহণ করে স্ব-অধ্যবসায়ে যে কোন ধরণের কিউবিক সমীকরণ-সমাধান-সূত্র আবিষ্কার করেন। ফলে তিনি হলেন অপরাজেয় অনন্য।

চার বছর বাদে কার্দানো তাঁর Ars Magna পুস্তকে এই সূত্র লিপিবদ্ধ করার জন্য সূত্রটি জানতে চাইলেন। তারতাগলিয়া অস্বীকৃত হওয়ায় কার্দানো জঘন্য ভাবে তাঁর কটুক্তি করেন। তারতাগলিয়া কার্দানোকে গণিত দ্বন্দ্বে আহ্বান করলেন। বেগতিক দেখে কার্দানো কটুক্তি প্রত্যাহার করে বন্ধুত্বের প্রস্তাব দিলেন, মার্কুইস ছল ভাসর্যোর পৃষ্ঠপোষকতার ইঙ্গিত দিলেন এবং মন্ত্রগুপ্তির শপথ জানিয়ে সূত্রটি জানতে চাইলেন। মার্কুইসকে টোপ হিসেবে ব্যবহার করে তারতাগলিয়াকে মিলানে এনে ও "একজন সৎ খৃষ্টান" হিসেবে "ভগবানের নামে শপথ নিচ্ছি" বলে 'সূত্রগুপ্তি'র শপথ নিলেন। তারতাগলিয়া সূত্র-প্রকাশ করলেন কিন্তু মার্কুইস এর সংগে দেখা হলো না।

ছয় বছর পরে Ars Magna প্রকাশিত হল—সমস্ত জগৎ দেখল সেই সূত্র যা চিরদিন অপ্রকাশ্য রাখার জন্য কার্দানো সত্যবদ্ধ ছিলেন। বহুকাল পরে 'আত্মজীবনী'তে সীমাহীন ধৃষ্টতার সংগে তিনি বলেন..."আমার পূর্বতন বন্ধুদের কোন গুপ্ত কথাই কোন দিনও প্রকাশ করিনি।" অবশ্য তার বইতে ওই সূত্র উদ্ভাবনে তারতাগলিয়ার দান তিনি কুণ্ঠাহীন ভাবে স্বীকার করেছেন। কিন্তু ভাগ্যের পরিহাস ইতিহাসের পাতায় সূত্রটি "কার্দানোর সূত্র" নামেই পরিচিত।

কিউবিক সমীকরণ এর ক্ষেত্রে না হলেও গণিতের অন্যক্ষেত্রে তাঁর অবদান অনস্বীকার্য। ঋণাত্মক সংখ্যার (Negative Numbers) প্রথম পরিষ্কার চিত্র তিনিই তুলে ধরেন; 'ঋণাত্মক মূল এর (Negative Roots) অস্তিত্ব স্বীকার করেন আর কাল্পনিক সংখ্যার (Imaginary numbers) প্রথম হিসাব করেন।

যুগান্তকারী Ars Magna ছাড়াও জুয়াখেলা সম্পর্কে বই লেখেন কার্দানো আর তাতেই সম্ভাব্যতারী সূত্র'এর (Laws of Probability) প্রথম ব্যাখ্যা দেখা যায়, একশ বছর পরে পাসকাল্ ও ফার্মাট এই নিয়ে অনুসন্ধান করার আগে পর্যন্ত কার্দানোর আবিষ্কার অনুক্তই ছিল। ইতিহাসের নিষ্ঠুর পরিহাস, গণিতের এই আবিষ্কারের জয়মাল্য পেলেন পাসকাল্ এবং ফার্মাট আর সত্যিকারের আবিষ্কারক কার্দানো বিখ্যাত হলেন তারতাগলিয়ার সূত্র চুরি করে।

আর্থিক উন্নতির সংগে সংগে নানা বিষয়ে বই লিখতে সুরু করলেন কার্দানো চিকিৎসা বিজ্ঞান, জ্যোতিষ বিদ্যা, মনোবিজ্ঞান ও মানসিক স্বাস্থ্য। ইউরোপের দ্বিতীয় শ্রেষ্ঠ চিকিৎসকরূপে পরিচিত কার্দানোর নিজের স্বাস্থ্য মোটেই ভাল ছিল না। বাস্তব ও কাল্পনিক বহুরকম রোগের সচল প্রতিমূর্তি ছিলেন কার্দানো। ইউরোপের বিভিন্ন দেশে চিকিৎসক হিসাবে রাজা, সম্রাট, আর্চবিশপদের চিকিৎসা করে বিখ্যাত হলেন কার্দানো।

শেষ জীবনে খৃষ্টধর্ম বিরোধিতার অভিযোগে কারাবদ্ধ হলেন উনসত্তর বছরের বৃদ্ধ কার্দানো।

তিন মাস কারাবাসের পর গোপনে পূর্বতন মতকে অস্বীকার করে ও খৃষ্টধর্মে বিশ্বাস ঘোষণা করে তিনি মুক্তি পেলেন। চলে গেলেন রোমে। প্রভাবশালী এক বন্ধুর চেষ্টায় ভূতপূর্ব খৃষ্টধর্ম-বিরোধী কার্দানো পোপের কাছ থেকে পেনসন পেলেন। পোপের সভায় কোষ্ঠী বিচার করে এবং লেখাপড়া নিয়ে দিন কাটে কার্দানোর। শোনা যায় নিজের কোষ্ঠি বিচার করে ৭৫ বৎসর পূর্তির চার দিন আগে ২০শে সেপ্টেম্বর ১৫৭৬ তারিখে মৃত্যু হবে ঘোষণা করে ঐ দিনও সম্পূর্ণ সুস্থ থাকায় নিজের ভবিষ্যদ্বাণী পূর্ণ করার জন্য আত্মহত্যা করেন।

—'জঁা মুর' কৃত Of Men & Numbers হইতে গুরুপ্রসাদ চক্রবর্তী অনূদিত।

ম্যাজিক স্কোয়ার

৮	১	৬
৩	৫	৭
৪	৯	২

১নং চিত্র

ম্যাজিক স্কোয়ার তৈয়ারী করিতে হইলে একটি বড় চৌকা বা স্কোয়ারকে ছোট ছোট চৌকায় ভাগ করিয়া লইতে হয় এবং প্রত্যেকটি চৌকায় এক একটি করিয়া সংখ্যা বসাইতে হয়। (একই সংখ্যা একবারের অধিক ব্যবহৃত হইবে না।) এই সংখ্যাগুলি এমন হইবে যাহাতে সমান্তরাল ভাবে, খাড়া ভাবে, অথবা কোণাকুণি ভাবে; যেদিক হইতেই সংখ্যাগুলিকে যোগ করা যাক না কেন, যোগফল একই হইবে।

উপরে নয়টি সংখ্যা বিশিষ্ট একটি ম্যাজিক স্কোয়ার দেখান হইয়াছে। ইহার যেদিক হইতেই যোগ করা যাক, যোগফল সর্বদাই পনেরো হইবে।

এইবার (বিজোড় সংখ্যক স্কোয়ার বিশিষ্ট) ম্যাজিক স্কোয়ার তৈয়ারী করিবার একটি সহজ প্রণালী জানানো হইতেছে।

একটি চৌকা আঁকিয়া তাহাকে নয়টি চৌকায় ভাগ করা হইল। এইবার প্রত্যেকটি চৌকায় উপযুক্ত সংখ্যা বসাইতে হইবে।

উপরের লাইনের মাঝখানের চৌকাটিতে সব সময়েই "এক" (১) বসাইতে হইবে।

অন্যান্য ঘরগুলিতে সংখ্যা বসাইবার জন্য তিনটি নিয়ম আছে।

সর্বোপরিস্থিত সমান্তরাল লাইনে যদি একটি সংখ্যা বসানো হইয়া থাকে, তবে পরের সংখ্যাটি বসাইবার জন্য ঐ সংখ্যার দক্ষিণ দিকের ঘরে সরিয়া যাইতে হইবে এবং খাড়াভাবে নামিয়া গেলে সর্বনিম্ন যে ঘর পাওয়া যাইবে, তাহাতেই পরের সংখ্যাটি লিখিতে হইবে।

কিন্তু যদি এই ঘরটিতে পূর্বেই কোন সংখ্যা বসানো হইয়া থাকে অথবা ডানদিকে সরিবার যদি কোন ঘর না থাকে, তাহা হইলে পরের সংখ্যাটি পূর্ব সংখ্যার ঠিক নিম্নের ঘরে বসাইতে হইবে।

উপরের ছবির উপরকার লাইনের মাঝখানের ঘরে '১' বসানো হইয়াছে। দ্বিতীয় সংখ্যাটি বসাইবার জন্য প্রথম সংখ্যাটির পাশের ঘরের সর্বনিম্নের চৌকায় '২' লেখা হইল।

ধরা যাক যে একটি সংখ্যা কোন সমান্তরাল লাইনের সর্বদক্ষিণে আছে। পরের সংখ্যাটি

বসাইবার জন্য প্রথম সংখ্যার ঠিক উপরের লাইনে উঠিতে হইবে এবং ঐ লাইনের সবচেয়ে বাম দিকে যে ঘরটি আছে, সেইখানে পরের সংখ্যাটি লিখিতে হইবে। কিন্তু যদি দ্বিতীয় সংখ্যাটির জায়গায় অন্য কোন সংখ্যা পূর্বেই লেখা থাকে অথবা প্রথম সংখ্যাটি সব চাইতে উপরের লাইনে থাকে, তাহা হইলে প্রথমটির ঠিক নীচে পরের সংখ্যাটি লিখিতে হইবে।

এখানে '২' সংখ্যাটি সর্বদক্ষিণে আছে। পরের সংখ্যাটি লিখিবার জন্য ঠিক উপরের লাইনের সর্ববামের ঘরে যাইতে হইবে। এই ঘরে '৩' লেখা হইল।

কিন্তু প্রথম সংখ্যাটি যদি সর্বদক্ষিণের খাড়া লাইনে অথবা সর্বোচ্চ লাইনে না থাকে, তাহা হইলে পরের সংখ্যাটি কোণাকুণি ভাবে ডানদিকের ঠিক উপরের ঘরটিতে লিখিতে হইবে। যদি ইহাও সম্ভব না হয়, তাহা হইলে পরের সংখ্যাটি পূর্বের সংখ্যার ঠিক নিম্নের ঘরে লিখিতে হইবে।

যেহেতু ৩ সংখ্যাটির কোণাকুণি ভাবে ডানদিকের উপরের ঘরটিতে ১ সংখ্যাটি পূর্বেই লিখিত হইয়াছে ৪ সংখ্যাটি ৩ এর ঠিক নিম্নে লিখিত হইল।

"৫" সংখ্যাটি লেখা হইল "৪" সংখ্যার উপরের সারিতে কোণাকুণি ভাবে ঠিক ডান দিকের ঘরটিতে।

এইভাবে "৬" সংখ্যাটিকেও উপযুক্ত স্থানে লেখা হইল। "৬" সংখ্যাটি সর্বোচ্চ লাইনের ডান দিকে আছে। সেই জন্য প্রথম নিয়ম কাজে লাগাইতে হইবে। যেহেতু ডান দিকে সরিবার জায়গা নাই, "৭" সংখ্যাটিকে "৬" এর নীচে লেখা হইল।

পরের সংখ্যাটি লিখিবার জন্য এক ঘর উপরে উঠা হইল। এই লাইনের সর্ববামের ঘরে "৮" সংখ্যাটি লিখিত হইল।

যেহেতু "৮" সংখ্যাটি সর্বোচ্চ লাইনে আছে, "৯" সংখ্যাটি পরের ঘরের খাড়াখাড়ি ভাবে সর্বনিম্ন ঘরে লিখিত হইল।

এইবার ম্যাজিক স্কোয়ারটি সম্পূর্ণ হইল কারণ প্রত্যেক ঘরেই সংখ্যা বসানো হইয়াছে।

১´	২	৩	৪˝
৫	˝˝৬	৭˝˝	৮
৯	১০˝˝	˝১১	১২
১৩˝	১৪	১৫	১৬´

২নং চিত্র

১৬	২	৩	১৩
৫	১১	১০	৮
৯	৭	৬	১২
৪	১৪	১৫	১

৩নং চিত্র

"১" সংখ্যাটি না লইয়া যে কোন সংখ্যাই লওয়া যাইত। কিন্তু প্রথম সংখ্যাটি সর্বদা উপরের লাইনের মাঝখানের ঘরে লিখিতে হইবে। শেষ সংখ্যাটি সর্বদা প্রথম সংখ্যার খাড়াভাবে সবচেয়ে

নীচেকার ঘরে থাকে। তাহা না হইলে ম্যাজিক স্কোয়ার গঠনে ভুল হইয়াছে বলিয়া জানিতে হইবে।

উপরোক্ত নিয়ম দ্বারা কেবল বিজোড় সংখ্যক ঘর বিশিষ্ট ম্যাজিক স্কোয়ারই গঠন করা যায়। জোড় সংখ্যার ঘর বিশিষ্ট ম্যাজিক স্কোয়ার গঠন অপেক্ষাকৃত শক্ত। ২নং চিত্রে ১৬টি ঘর বিশিষ্ট একটি ম্যাজিক স্কোয়ারের গঠন দেওয়া হইল।

উক্ত চিত্রে "১" হইতে "১৬" পর্যন্ত সংখ্যাগুলিকে পর পর লেখা হইয়াছে। এইবার একা ভাবে চিহ্নিত সংখ্যাগুলির (যেমন ১ ও ১৬) পরস্পর স্থান বদল করিয়া লেখা হইল (৩নং চিত্র)। দেখা যাইবে যে ইহা একটি ম্যাজিক স্কোয়ারে পরিণত হইয়াছে।

সংখ্যাগুলিকে কোণাকুনি, সমান্তরাল ভাবে বা খাড়া ভাবে যে কোন রকমেই যোগ করা যাক না কেন যোগফল সব সময়ই চৌত্রিশ হইবে।

২০	২৭	৪	১১	১৮
২৬	৮	১০	১৭	১৯
৭	৯	১৬	২৩	২৫
১৩	১৫	২২	২৪	৬
১৪	২১	২৮	৫	১২

৪নং চিত্র

৪নং চিত্রে ২৫টি সংখ্যা বিশিষ্ট (৪—২৮) একটি ম্যাজিক স্কোয়ার দেখান হইয়াছে। এখানে যোগফল হইবে ৮০।

প্রমোদ কুমার

বিজ্ঞান ও প্রকল্প ঃ সংখ্যা ও মানগুণ্যঃ

আঁরি প্যাওয়ঁাকারে

(১)

গাণিতিক যুক্তি বিস্তারের প্রকৃতি ঃ

অঙ্ক বিজ্ঞানের যথার্থ সূত্রপাত, সম্ভাবনা, মনে হয় মীমাংসারহিত এক দুর্জ্ঞেয় বিরুদ্ধবাদ যদি এই বিজ্ঞান শুধু মাত্র তাহার চেহারাতেই—আপাতদৃষ্টিতেই যদি ব্যবকলনধর্মী বা অবরোহী হয়, তাহা হইলে সে ক্ষেত্রে প্রশ্ন উঠে, তাহার যুক্তির সেই সম্যক বলিষ্ঠতা (rigour) বা কোন ভাবে আসিল—যে বলিষ্ঠতা সম্পর্কে কেহ আজও কোন প্রশ্ন করেন নাই? আবার অন্যপক্ষে, যদি এই বিজ্ঞানই যে সকল প্রতিপাদ্য নির্বচন করে, সেগুলি ন্যায়তত্বের (formal logic) নিয়ম দ্বারা উৎপত্তি বা হেতু নির্ণয় সাধ্য হয় অর্থাৎ হেতু নির্ণয় করা যায়—তাহা হইলে এই দিক দিয়া অঙ্ক শাস্ত্র একটি মস্ত সমার্থবাচক শব্দ হইয়া দেখা দেয় না কেন?

ন্যায় অর্থে সিলজিসম আমাদের নূতন কিছু তত্ত্বজ্ঞান শিখাইতে পারে না এবং যদি ধরা হয় সকল কিছু এক অভেদের অন্বয় (principle of identity) হইতে উৎপন্ন হয়, তাহা হইলে নির্ঘাত সকল কিছুর সেই আদি অন্বয়ে পরিণতি লাভ করিবার হেতু থাকিয়া যায়। এবং এই সূত্রে আমরা কি স্বীকার করিব যে সকলকিছু উপপাদ্যের নির্বচন লইয়া যে অগণিত গ্রন্থ লিখিত হইয়াছে, তাহার বিষয়বস্তু কেবলমাত্র অপরোক্ষ ভাবেই শুধুমাত্র বলার চেষ্টা যে 'ক' হয় 'ক'?

এখন, নিশ্চিন্ত মনে আমরা সেই সব স্বতঃসিদ্ধ তত্বগুলির কথা উত্থাপন করিতে পারি যেগুলি ঐ সব বিচার বিবেচনার উৎস উপাদান হইয়া আছে। অবশ্য এ কথা আমরা উপলব্ধি করি যে ঐ সকল স্বতঃসিদ্ধগুলিকে বিরুদ্ধবাদের অন্বয়ে কোন ক্রমেই আনিয়া ফেলা যাইবে না; বা পরিণমন তথা হ্রস্বীকরণ সম্ভব নয়, এ ছাড়া, তাহাদের মধ্যে 'পরখ-সাধ্য (experimental) ব্যাপার' অবশ্য এই ব্যাপারের সহিত অঙ্কশাস্ত্রের কোন যোগ বা অংশ নাই—সেই 'পরখ-সাধ্য ব্যাপার' ছাড়া আর অন্য কিছু যদি ধরতব্যের মধ্যে লইতে রাজী না হই—তখন দেখিব, যে একটি মাত্র বিষয় থাকিয়া যায় যাহাকে 'পূর্বাহ্ন মিশ্র' দৃষ্টি (Synthetic views) বলা যায়। তবু এইটুকুতেই, প্রতিবন্ধকতার কোন সুরাহা হয় না, শুধু একটি নাম দেওয়া হয়। এমন কি যদি সেই মিশ্রদৃষ্টির রীতি পদ্ধতির মধ্যে আমাদের জন্য কোন হেঁয়ালী-রহস্য না থাকে, যদি তাহা খুবই পরিষ্কার পরিচ্ছন্ন হয় তখনও দেখা যাইবে, বিরুদ্ধবাদ কোন সূত্রেই অদৃশ্য হইয়া যায় নাই—ফলে আমাদের আদত প্রশ্নকে শুধুমাত্র এড়ানই হইয়াছে। সিলজিসম অনুযায়ী যুক্তি বিবেচনা তাহার সম্পর্কে নূতন কোন চিন্তার দ্বারা তাহার তথ্যকে সমৃদ্ধ করিতে পারে নাই। তথ্যগুলি অবশেষে পরিণমিত হইয়া স্বয়ংসিদ্ধ হইয়া দেখা দেয়—এইটুকুই মাত্র সিদ্ধান্ত করা যায়।

কোন উপপাদ্যই সম্পূর্ণ নূতন হইতে পারে না, যতক্ষণ পর্য্যন্ত না কোন একেবারে নূতন স্বয়ংসিদ্ধ সত্য সেই উপপাদ্যকে ব্যক্ত ভাবে প্রমাণ করিতে সহায় না হয়; যুক্তিবিচার সরাসরি স্বজ্ঞা (intuition) হইতে কতক স্পষ্টত-সত্য আহরণ করিয়া আমাদের দিতে পারে। এবং এই দিক দিয়া ইহা এ-ব্যাপারে পরাশ্রয়ী বা পরমুখাপেক্ষী মাত্র। অতএব, আমরা অন্যসূত্রে যাহা আহরণ বা কার্য্য করিয়াছি, সে ব্যাপারকে—ন্যায় কৌশল দেখা যাইবে শুধু ঢাকা দিতেই ছদ্মবেশ পরাইতে ব্যস্ত এবং এমন কথা বলিলে সম্ভবত অন্যায়—অসঙ্গত হইবে না।

যে কোন অঙ্কের বই খুলিলেই বিরুদ্ধবাদ বড় বেশী করিয়া দেখা দিবে, প্রতিটি পাতায় দেখিব লেখক বলিতেছেন 'যে সকল প্রতিজ্ঞা পূর্ব হইতেই বিদিত সেইগুলিকে সাধারণীকরণ (generalise) করাই তাহার উদ্দেশ্য'। এই যদি কথা হয় অর্থাৎ অঙ্কশাস্ত্রগত পদ্ধতি যদি বিশেষত্ব হইতে সাধারণত্বের দিকে যায় আর ইহাই যদি সত্য হয় তাহা হইলে উহাকে কেমন করিয়া ব্যবকলন মীমাংসা বলিব?

আবার; অবশেষে যদি সংখ্যাবিজ্ঞান শুধুমাত্র বিশ্লেষণ-সাধ্যই হয়, কিম্বা কয়েকটি মিশ্র স্বজ্ঞা হইতে বিশ্লেষণসাধ্য ক্রিয়ার ফলে প্রসূত হয়, তাহা হইলে এক্ষেত্রে মনে হয় যে কোন প্রখর দৃষ্টিসম্পন্ন ব্যক্তি এক নজরেই উহার সত্যসত্তা অনুধাবন করিতে পারিবেন। অধিকন্তু, এমনও আশা হয়, যে কোন সাদামাটা বুদ্ধিসম্পন্ন লোকের জন্য ঐ সকল সত্যের সম্যক্ প্রকাশের জন্য একটি বিশেষ ভাষারও সৃষ্টি হইবে।

অবশ্য এই সকল কার্য্যকারণগুলি সম্পর্কে অনেক প্রশ্ন তোলা যায় সত্য; তবু অঙ্কবিষয়ক যুক্তি বিবেচনার নিজেরই একটি সৃষ্টি করিবার ক্ষমতা বা গুণ আছে এবং এই দিক দিয়া সিলজিসমের হইতে পৃথক বলিয়া ধরা কর্তব্য। এ পার্থক্য নিশ্চয়ই অতীব গভীর। প্রথমতঃ ধরা যাক, দুইটি ঐক্য-সংখ্যার ব্যাপারে যে নিয়মটি আমরা প্রায়ই ব্যবহার করিয়া—সমান প্রক্রিয়া আরোপ করিয়া, একই অভিন্ন ফলাফল লাভ করি তাহার রহস্যের চাবিকাঠিটি আমরা কোন ক্রমেই পাইব না। এইভাবে নানা রকমের যুক্তি বিবেচনা ন্যায় (সিলজিসমে) তত্ত্বে নিরসন করা যাক বা নাই করা যাক—সঠিক অর্থে তাহাদের বিশ্লেষণ-সাধ্য চরিত্র ত্যাগ করে না, এইজন্য, তাহাদের ক্ষমতা হারায়।

(২)

তর্কটি খুবই পুরাতন। দেখা যাক লিইবনেৎস (Leibnitz) কি ভাবে দুই এবং দুই যোগে—কি প্রকারে চার হয় তাহা প্রমাণ করিতে চাহিয়াছিলেন। প্রথমেই, '১' এই সংখ্যাটিকে সংজ্ঞাবিহিত করিব মনস্থ করা যাক, এই সঙ্গে $x+১$ এই প্রক্রিয়াটিও সংজ্ঞাবিহিত করিব। $x+১$ অর্থাৎ নির্দ্দিষ্ট সংখ্যা x এর সহিত একক যোগ করিব। এই সংজ্ঞাগুলি যাহাই বুঝাক না কেন উহারা পরবর্ত্তী যুক্তি বিবেচনার বিষয়ীভূত হইবে না। পরে, আমি ২, ৩, ৪ সংখ্যাগুলির ঐক্যতার দিক দিয়া সংজ্ঞা নির্ণয় করিব।

(১) $১+১=২$ (২) $২+১=৩$ (৩) $৩+১=৪$ এবং এখানে এই প্রকারে $x+২$ সম্বন্ধ যোগ হেতু প্রক্রিয়ার সংজ্ঞা বিহিত করিব। (৪) $x+২=(x+১)+১$

ফলে আমরা দেখিব—

	$২+২=(২+১)+১$	(সংজ্ঞা ৪)
	$২+১+১=৩+১$	(সংজ্ঞা ২)
	$৩+১=৪$	(সংজ্ঞা ৩)
ফলে	$২+২=৪$	(প্রমাণিত)

এবং অবশ্য এ কথা অস্বীকার করিবার কোন উপায় নাই যে এইরূপের যুক্তি বিস্তার সম্পূর্ণরূপে বিশ্লেষণধর্মী। এবিষয়ে আমরা যদি কোন অঙ্কশাস্ত্রবিদকে প্রশ্ন করি, তাহা হইলে তিনি উত্তর করিবেন, উহা কোনক্রমে ব্যক্তপ্রমাণদর্শন নয়, অন্যপক্ষে উহা সত্যপ্রতিপাদন মাত্র। আর আমরা শুধুমাত্র নিছক সাবেকী (conventional) সংজ্ঞার দুইটির মধ্যে হয় একটি নয় অন্যটির দিকে মন রাখিয়াছি, নিজেদের সীমিত করিয়াছি। কিন্তু আর কিছুই বিশেষ শিক্ষা করি নাই। প্রমাণ হইতে সত্যপ্রতিপাদন যথাযথভাবে আলাদা—কারণ ইহা বিশ্লেষণ-সাপেক্ষ, ইহার দ্বারা কোন কিছুর সুরাহা হয় না—কোথাও পৌছাইতে ইহা সহায়তা করে না। কোথায়ও পৌছাইতে সহায়তা করে না অর্থাৎ সিদ্ধান্তটি প্রতিপাদ্যকে আর এক ভাষায় বলা ছাড়া আর কিছু নয়।

অন্যপক্ষে, নির্ঘাত সত্য প্রমাণ, খুবই ফলপ্রসূ; আসল কারণ বিশেষ দৃষ্টিকোণ হইতে বিচার করিলে দেখা যায় যে প্রতিজ্ঞা বা প্রতিপাদ্য অপেক্ষা সিদ্ধান্ত ব্যাপকতর $২+২=৪$ এই সমতার সত্যপ্রতিপাদন করা যায় কারণ ইহা সবিশেষ। অঙ্কশাস্ত্রের প্রত্যেক নির্বচনের এইভাবে সত্যপ্রতিপাদন করা যায়। কিন্তু, যদি অঙ্কশাস্ত্রের সকল কিছুকেই সবসময় সত্যপ্রতিপাদন মধ্যে ক্রুবীকরণ করা যায় তাহা হইলে সে শাস্ত্র আর বিজ্ঞান কি করিয়া হয়? এই প্রসঙ্গে বলা যায় যে দাবা খেলোয়াড় একটি ঘুঁটি মারিয়া বিজ্ঞান সৃষ্টি করে না। এখানে সাধারণতার বিজ্ঞান ছাড়া বিজ্ঞান বলিয়া অন্য কিছু নাই। তাই আমরা বলিতে পারি যথার্থ বিজ্ঞানের উদ্দেশ্যই হইবে এহেন সরাসরি সত্যপ্রতিপাদন বাদ দেওয়া।

(৩)

এখন যদি জ্যামিতিবিদের কাজকর্ম দেখা যায়, এবং তাহার কয়েকটি পদ্ধতির পর্যালোচনা করা যায়, তাহা হইলে দেখিব—যে কাজটি খুবই সহজ নয়। শুধু যে একটি বইএর যত্রতত্র খুলিয়াই সবকিছু হইবে বা যে কোন প্রমাণকে বিশ্লেষণ করিয়া দেখিলেই চুকিয়া যাইবে এমন নহে। প্রথমত, জ্যামিতিকে এ বিষয়ে বাদ দেওয়াই শ্রেয়, না হইলে শর্ত এবং অবকাশের (space) আদিমূল ও প্রকৃতি মিলিত হইয়া দুরূহ সমস্যাগুলি আমাদের প্রশ্ন সকলকে ঘোরাল করিবে। অনেকটা এই কারণে, অনুকলন (infinitesimal calculus) ব্যাপারটিকেও ধরা যায় না। তাই আমাদের অঙ্কচিন্তা যেখানে এখনও বিশুদ্ধ আছে অর্থাৎ পাটিগণিতে—তাহার অনুসন্ধান করিতে হইবে। এই

ক্ষেত্রেও মনোনয়নের প্রশ্ন আসে, কেন না সংখ্যাতত্ত্বের উচ্চ মার্গে প্রাচীনতম আদিমতম অঙ্কবিষয়ক ভাবরূপগুলি ক্রমেই অতি নিগূঢ় মাত্রায় প্রগাঢ়ভাবে এমন বিশদ আকার ধারণ করিয়াছে যে উহা বিশ্লেষণ এক প্রকার দুরূহ।

পাটিগণিত বিষয়ক আলোচনায় আমরা যে কথাটি যে ব্যাখ্যাটি অনুসন্ধান করিতেছি আশা হয় সর্ব্বপ্রথমেই তাহা পাইব। কিন্তু সেগুলি ভাগ্যশঃ যথার্থভাবে প্রাথমিক উপপাদ্যের সকলের মধ্যে নিহিত—যাহাদের—উপপাদ্যগুলি বিষয়ে অত্যুত্তম তত্ত্ব রচয়িতারা কিছুমাত্র যথার্থতা এবং বলিষ্ঠতা দেখান নাই; অবশ্য এই কারণে তাহাদের অপরাধী করা যায় না। তাহারা শুধুমাত্র তৎকালীন প্রয়োজন মিটাইতে বাধ্য হন। এবং একথাও ঠিক যে, নূতন শিক্ষার্থীরা অঙ্ক শাস্ত্রের (rigour) বলিষ্ঠতার জন্য মোটেই তৈরী নহে। নূতন শিক্ষার্থীদের কাছে উহা সম্পূর্ণ ভুয়ো জটিল সূক্ষ্মতা হইয়া দেখা দিবে, উহার মর্ম্ম উপলব্ধি করা তাহাদের পক্ষে সম্ভব নয়। আর শিক্ষার্থীদের সর্ব্ববিষয়ে খুব সঠিক করিতে যাওয়াও শুধুমাত্র সময়ক্ষেপ ছাড়া আর কিছুই নয়। নূতন শিক্ষার্থীদের দরকার খুব তাড়াতাড়ি পাঠ শেষ করা, যে পথে তত্ত্ব রচয়িতারা, বিজ্ঞানের প্রবর্ত্তকরা, প্রতিষ্ঠাতারা, খুব সন্তর্পণে অগ্রসর হইয়াছেন সে পথের কোথাও ইতস্তত না করিয়া নূতন শিক্ষার্থীরা অগ্রসর হইতে পারে।

এই নিছক বলিষ্ঠতাকে রপ্ত করিতে এত সুদীর্ঘ সময়ের প্রয়োজন কেন অথচ যাহা সচারচর মনে হয়, সকলের মনেই সহজেই স্বাভাবিকভাবে ভর করিতে পারে—বসিয়া যাইতে পারে?

এ ব্যাপার মনস্তাত্ত্বিক ও ন্যায়সঙ্গত সমস্যা, এবং ইহা পর্য্যালোচনার উপযুক্ত বিষয়। আমরা উহা আলোচনা করিব না। যেহেতু আমাদের বিষয় বহির্ভূত। এখন এই কথাই আমার স্মরণ করাইয়া দেওয়া উদ্দেশ্য, অর্থাৎ আমার ইচ্ছা বিশেষরূপে এ কথার উপর জোর দেওয়া যে আমাদের উদ্দেশ্য কোনক্রমেই সাধিত হইবে না যদিনা প্রাথমিক উপপাদ্যগুলির প্রমাণগুলিকে পুনর্গঠনে আমরা না নিযুক্ত হই। নূতন শিক্ষার্থীদের যাহাতে ব্যতিব্যস্ত না করে বলিয়া ভাসাভাসা আকারে সেইগুলি রাখিয়া দেওয়া হইয়াছে; সেই অবস্থা হইতে আর এক বিশেষ ভাবে গঠন করা যাহাতে পাকা দক্ষ জ্যামিতিবিদকে সন্তুষ্ট করে।

যোগের সংজ্ঞা ॥

মনে করি যে $x+১$ প্রক্রিয়া ইত্যবসরে সংজ্ঞাবিহিত করা হইয়াছে। ক্রিয়াটি, কাজটি সম্পাদিত হয় যখন '১' সংখ্যা কোন নির্দ্দিষ্ট সংখ্যা 'x' এর সহিত যোগ করা হয়' এ প্রক্রিয়ার সংজ্ঞা সম্পর্কে যাহা বিহিতই হউক পরবর্ত্তী যুক্তি আলোচনায় আসে না।

এখন আমরা $x+a$ এই প্রক্রিয়া সংজ্ঞাবিহিত করিব। যে কোন নির্দ্দিষ্ট সংখ্যা 'x' এর সহিত 'a' সংখ্যা যোগ করাতেই যাহার কাজ সম্পাদিত হয়। এখন ধরা যাক, $x+(a-১)$ এই প্রক্রিয়া আমরা সংজ্ঞাবিহিত করিয়াছি; তাহা হইলে, $x+a$ প্রক্রিয়া নীচের সাম্য দ্বারা সংজ্ঞাবিহিত হইবে: (১) $x+a=[x+(a-১)]+১$.

তথনই $x+a$ এর অর্থ সঠিক বুঝিব যখন $x+(a-১)$ সম্পর্কে আমাদের ধারণা সঠিক

হইবে। এবং যেমন পূর্ব্বে আমি মনস্থ করিয়াছিলাম $x+১$ প্রকৃতি আমরা জানি, আমরা পরম্পরা এবং পৌনঃপৌনিকতার দ্বারা প্রক্রিয়া $x+২$, $x+৩$ সংজ্ঞা বিহিত করিতে পারি। এবং এই সংজ্ঞাকে এক মুহূর্ত্তেই বিচার করিয়া দেখিতে পারি। ইহা একটি বিশেষ রকমের বা প্রকৃতির যাহা উহার স্বকীয়তাকে আদত ন্যায়সঙ্গত সংজ্ঞা হইতে ঐ অবস্থা বা স্তরেও স্বতন্ত্র করিয়া দেখায়। সাম্য (১) সত্যই, ইহার মধ্যে অসংখ্য (infinite number) সুস্পষ্ট সংজ্ঞা নিহিত আছে। প্রত্যেক সংজ্ঞা এক এবং অভিন্ন অর্থ আছে। সেই অর্থ তখনই বুঝা যায় যখন সংজ্ঞার পূর্ব্ববর্তী সংজ্ঞার অর্থটি আমরা বুঝি।

যোগের সারবত্তা॥

associative—(সংযোগ) আমি বলি $a+(b+c)=(a+b)+c$, যথার্থই উপপাদ্যটি $c=১$ ব্যাপারেই সত্য। এখন যদি এইভাবে ফেলা যায়, $a+(b+১)=(a+b)+১$ যাহা শুধু সংখ্যাপাতনের দিক হইতে আলাদা হওয়া ছাড়া, সাম্যর দিক দিয়া সমান (১) যে সাম্য দ্বারা আমি যোগের সংজ্ঞা বিহিত করিয়াছি। এখন ধরা যাক, $c=y$ ব্যাপারেও উপপাদ্যটি সত্য। তখনই দেখা যাইবে যে $c=y+১$ ব্যাপারেও উহা সত্য। যদি $(a+b)+y=a+(b+y)$ অতএব $[(a+b)+y]+১=[a+(b+y)]+১$; অথবা সংজ্ঞা '১' অনুযায়ী—$(a+b)+(y+১)=a+(b+y+১)=a+[(b+y+১)]$ এইভাবে দেখানও যায় অবশ্য আদত বিশ্লেষণাত্মক ব্যবকলন দ্বারা দেখান যায়, যে $y+১$ ব্যাপারে উপপাদ্যটি সত্য। $c=১$ সত্য হওয়ার দরুণ $c=২$, $c=৩$ এইভাবে পরম্পরা সত্য।

commutative—(বিনিময়) আমি মনস্থ করি যে $a+১=১+a$। এই উপপাদ্যটি সাক্ষাৎ (evidently) সত্য $a=১$ ব্যাপারে; আমরা আদত বিশ্লেষণধারায় যুক্তিবিবেচনার দ্বারা হিসাব-নিকাশ (verify) করিতে পারি যদি $a=y$ ব্যাপারে ঠিক হয়, সত্য হয়, তাহা হইলে $a=y+১$ ব্যাপারেও সত্য। যেহেতু $(y+১)+১=(১+y)+১=১(y+১)$

এখন যেহেতু $a=১$ ব্যাপারে সত্য, অতএব $a=২$, $a=৩$ ব্যাপারগুলিতেও সত্য। এবং এই ভাবে পরম্পরা সত্য হইতে থাকিবে। ফলে এইরূপ ফলিত করিয়া দেখাকেই বলা হয় প্রমাণ, পৌনঃপৌনিকতার দ্বারা যাহা ব্যক্ত হয়।

২) মনস্থ করি যে $a+b=b+a$ এবং উপপাদ্যটি যে $b=১$ ব্যাপারে ঠিক হয়, এ কথা আমরা বিচার করিলাম, এবং বিশ্লেষণ ধারায় ইহাকে কষিয়া (verified) দেখা যাইতে পারে যে ইহা যদি $b=B$, ব্যাপারে সত্য হয় তাহা হইলে নিশ্চয়ই $b=B+১$ ব্যাপারেও সত্য।

এই প্রতিজ্ঞা (proposition) আমরা বুঝিব যে, পৌনঃপৌনিকতার দ্বারা পত্তন হয়।

গুণের সংজ্ঞা :

আমরা এখন গুণের সংজ্ঞা সাম্যের দ্বারা (by equalities) নির্দ্ধারিত করিব, যথা (১) $a\times১=a$ (২) $a\times b=[a\times(b-১)]+a$.

উপরোক্ত দুইটির বিচারের মধ্যেই অসংখ্য সংজ্ঞা অন্তর্ভুক্ত হয়, বা দেখা দেয় $a\times১$ যখনই আমরা সংজ্ঞাবিহিত করি তখন ইহার বলে আমরা $a\times২$, $a\times৩$ এইভাবে অনেক সংজ্ঞাবিহিত করিতে সক্ষম হই।

distributive (বিতরন) আমি মনস্থ করি $(a+b)\times c=(a\times c)+(b\times c)$ এখানেও বিশ্লেষণ ধারায় কষিয়া দেখা যায় যে উপপাদ্যটি $c=১$ ব্যাপারে ঠিক; এবং ইহার পর যদি $c=y$ ব্যাপারে সঠিক হয় তাহা হইলে $c=y+১$ ব্যাপারেও নির্ঘাত সঠিক হইবে। তাহা হইলে দেখা যায় আমাদের প্রতিজ্ঞা ক্রমাগত পৌনঃপৌনিকতার দ্বারা প্রমাণিত হয়।

commutative—(১) এখন যদি মনস্থ করি $a\times১=১\times a$, উপপাদ্যটি $a=১$ হিসাবে স্পষ্টত প্রতীয়মান। আবার আমরা বিশ্লেষণ ধারা অনুযায়ী কষিতে পারি—যে যদি ইহা $a=a$ ব্যাপারে সঠিক হয়, তাহা হইলে নিশ্চয়ই $a=a+১$ ব্যাপারেও সত্য হইবে।

(২) এখন আমি মনস্থ করি $a\times b=b\times a$ এই উপপাদ্য পূর্ব্বেই $b=১$ হইলে, প্রমাণ করা হইয়াছে। এবং বিশ্লেষণ ধারা অনুযায়ী করা যায় যে যদি $b=B$ ক্ষেত্রে সত্য হয়, তাহা হইলে $b=B+১$ ব্যাপারে সঠিক।

(৪)

এই ধরণের একঘেয়ে যুক্তি বিবেচনার কথা এখন স্থগিত রাখা যাইতে পারে; তবু একথা বলা যায় যুক্তি বিবেচনার এই বিশেষ একঘেয়েমিই আমাদের কাছে প্রক্রিয়াকে সুস্পষ্ট করিয়া তুলে। প্রক্রিয়া সমান বা একই এবং প্রতি পদক্ষেপেই একই ভাবে দেখা দেয়; প্রক্রিয়াকে বলা যায় পৌনঃপৌনিকতার দ্বারা প্রমাণ। আমরা প্রথমেই আলোচনা করিয়াছি যে একটি উপপাদ্য $x=১$ ব্যাপারে সঠিক। এবং তাহার পর আমরা দেখিয়াছি যে যদি তাহা $x-১$ ব্যাপারে সঠিক হয় তাহা হইলে x ব্যাপারেও উহা সত্য, এবং ফলে, এইভাবে আমরা সকল পূর্ণ সংখ্যার ব্যাপারে ইহা সত্য ও সঠিক তাহা সিদ্ধান্ত করিতে পারি। এখনই আমরা দেখিলাম, যে যোগ এবং গুণের বিধির প্রমাণ করার জন্য কি ভাবে উহাকে কাজে লাগান যায়—অর্থাৎ বলা যায় বীজগণিতের কালকুলাস-বিধি ব্যাপারে কাজে লাগাইতে পারি।

এই কালকুলাসই রূপান্তরণের যন্ত্র বা পন্থা (instrument of transformation)। সাধারণ ন্যায় হইতে ইহা অনেক কিছু বিভিন্ন সংযুক্তিতে (combination) কাজে লাগে। তবু বলিতে হইবে ইহা বিশ্লেষণকারী যন্ত্র বা পন্থা মাত্র এবং ইহার দ্বারা আমরা নূতন কিছুই শিখিতে পারি না।

যদি অঙ্ক শাস্ত্রের আর অন্য কোন যন্ত্র বা পন্থা না থাকিত তাহা হইলে আমরা দেখিতাম যে শাস্ত্রের সম্প্রসারণে অচিরাৎ বাধা পড়িত; কিন্তু একই প্রক্রিয়ার সাহায্য শাস্ত্র নূতন করিয়া গ্রহণ করে। পৌনঃপৌনিকতা দ্বারা যুক্তি বিবেচনা। এইভাবে শাস্ত্র অগ্রসর হইতে থাকে।

আমরা যদি ভাল ভাবে দেখি, দেখিব প্রতি পদক্ষেপেই এই ধরণের যুক্তি বিবেচনা আছে, হয় তাহা অতি সাধারণরূপে যে রূপের কথা এতক্ষণ আমরা আলোচনা করিলাম অথবা কম বেশী

কোন পরিবর্ত্তিত রূপে। ফলে ইহাকে দারুন যুক্তিবিবেচনা বলিয়া অভিহিত হয়। আমরা নিখুঁত ভাবে পরীক্ষা করিব।

(৫)

পৌনঃপৌনিকতার দ্বারা যুক্তিবিবেচনার বিশেষ চরিত্র আলোচনা করিলে দেখিব—উহাতে একীভূত হইয়া থাকে, অর্থাৎ একটি মাত্র বিধি (formula), অগণিত সিলজিসম। আমরা এই কথা পরিষ্কাররূপে বুঝিতে পারিব অবশ্য যদি আমরা একের পর এক সিলজিসম নির্বচন করিয়া দেখি, একটির পর একটিকে অনুসরন করে, যেন, যদি এই ভাবে বলা যায়-যে জলপ্রপাতের ধারায় নিম্নলিখিত ধারণাগুলি প্রাকল্পিক (hypothetical)। ন্যায়-উপপাদ্য '১' সংখ্যাটির বিষয় সত্য, এখন যদি '১' সংখ্যাটির সূত্রে সত্য হয়, ইহা '২' সংখ্যার ব্যাপারেও সত্য, যদি '২' সংখ্যার ব্যাপারে সঠিক হয় তাহা হইলে '৩' সংখ্যার ব্যাপারে সঠিক—ফলত '৩' সংখ্যার ব্যাপারে সঠিক এবং এইভাবে চলে; এবং আমরা দেখিতে পাই প্রতিটি সিলজিসম এর সিদ্ধান্ত তাহার পরবর্ত্তী অনুসরণকারীর নিম্নতা (minor) হিসাবে কাজ করে। এবং আর একটু ভাবা যায়—আমাদের সিলজিসম এর যেগুলি উচ্চতর (major) তাহাদের সকলকেই সহজেই একটি মাত্র রূপে হ্রস্বীকরণ করা যায়, যদি n – ১ ব্যাপারে উপপাদ্য খাঁটি হয় তাহা হইলে উহা নির্ঘাত n ব্যাপারেও ধ্রুব।

এখন, আমরা উপলব্ধি করি পৌনঃপৌনিকতার দ্বারা যুক্তিবিবেচনায় আমরা প্রথমোক্ত সিলজিসমের নিম্নতার (minor) এবং সাধারণ সূত্র যাহাতে বিশেষ বিশেষ দৃষ্টান্ত হিসাবে সমস্ত উচ্চতরগুলি থাকে সেই সবের নির্বচন করাতেই আমরা নিজেদের সীমাবদ্ধ রাখি। এই অশেষ সিলজিসমের সারবন্দি শুধুমাত্র কয়েকটি কথায় ছকিয়া ফেলা যায়।

এখন আমরা সহজেই বুঝিতে সমর্থ হইব, যে, কেন একটি উপপাদ্যের প্রতিটি নির্দ্দিষ্ট ফলাফলই, আগে যেমন বলিয়াছি ব্যাখ্যা করিয়াছি, বিশ্লেষণ ধারা অনুযায়ী কষিয়া (verified) দেখা যায়। অতএব যদি আমাদের উপপাদ্যটি সকল সংখ্যার ব্যাপারেই যে সঠিক একথা প্রমাণ না করার পরিবর্ত্তে—ধরা যাক আমরা ঠিক করি শুধুমাত্র '৬' সংখ্যার ব্যাপারে উহা সঠিক; তাহা হইলে আমাদের ধারাবাহিকতার প্রথম পাঁচটি সিলজিসম কবুল বা প্রতিপাদন করিলেই যথেষ্ট হইবে। এবং এইভাবে '৯' সংখ্যাটির প্রয়োজন হইবে যদি আমরা '১০' সংখ্যাটি ব্যাপারে উহাকে প্রমাণ করিতে চাহি। উচ্চতর সংখ্যার ব্যাপারে আমাদের আরও সংখ্যার দরকার হইবে। এবং সংখ্যা যত বড়ই হউক না কেন, আমরা সকল সময়ই উহার নাগাল পাইব এবং বিশ্লেষণ ধারায় কষিয়া বা খতাইয়া দেখা সকল সময়ই সম্ভব হইবে। কিন্তু যত দূরেই আমরা যাই, গভীরে যাই, আমরা দেখিব, এমন একটি সাধারণ উপপাদ্যকে স্থির করিতে পারিবনা যে উপপাদ্যকে সকল সংখ্যার ব্যাপারে অবাধে খাটাইতে পারি; ইহাই একমাত্র বিজ্ঞানের উদ্দেশ্য। এই স্থিরকরণে আমাদের অসংখ্য সিলজিসমের প্রয়োজন এবং আমাদের এক্ষেত্রে একটি বিরাট ব্যবধান (abyss) পার হইতে হইবে, যাহা বিশ্লেষণকারীর কেবলমাত্র স্বাভাবিক ন্যায়ের

ধ্যানধারণাই যাহার সম্বল তথা জ্ঞান সীমিত অর্থাৎ তাহার পক্ষে সেই বিশ্লেষণকারীর ধৈর্য্য দ্বারা উহা কোন কালেই পার হওয়া অসম্ভব।

প্রবন্ধের গোড়াতেই আমি প্রশ্ন তুলিয়াছিলাম যে কেনই বা আমরা এমন একজনের কল্পনা করিতে পারি না, যে ক্ষমতাসম্পন্ন মন এক নিমেষেই অঙ্কশাস্ত্রগত সকল সত্যই দেখিতে পাইবে। এখন এ প্রশ্নের উত্তর অতীব সরল। একজন দাবা খেলোয়াড় আগেভাগেই চার-পাঁচটা চাল ভাবিতে পারে; কিন্তু যতই কেননা সে খুব চৌখস খেলোয়াড় হউক তাহার পক্ষে সীমা জানা রাশি ছাড়া সসীম সংখ্যার অধিক ভাবা অসম্ভব। যদি সে তাহার বুদ্ধিমত্তাকে পাটিগণিতের ব্যাপারে লাগায়, সে কোন ক্রমেই ঐ-শাস্ত্রের খুব সহজ সাধারণ সত্যগুলিকে স্বজ্ঞার সাহায্যে বুঝিতে পারিবে না। অতি ছোটখাট উপপাদ্যকেও বুঝিতে হইলে, তাহাকে পৌনঃপৌনিক ধারায় যুক্তিবিবেচনাকে কাজে লাগাইতে হইবে—এই জন্য যে ঐ উপায়টি, যন্ত্রটি, আমাদের সত্যই জানা-রাশি হইতে অজানা-রাশির দিকে অগ্রসর হইতে সাহায্য করে। এই উপায়-যন্ত্রটি আমাদের একান্ত প্রয়োজন—বড়ই কাজের, ইহার সাহায্যে আমরা যতটা ধাপ (step) ইচ্ছা, একবারেই লাফ দিতে পারি। এ উপায় আমাদের সুদীর্ঘ বিরক্তিকর একটানা খতাইয়া-দেখা যাহা দ্রুত অকেজো হইয়া দেখা দেয় তাহা হইতে অনায়াসে মুক্তি দিতে পারে। তাই যখনই সহজ-সাধারণ উপপাদ্য লইয়া বসি বা দেখিব বলিয়া গ্রহণ করি তখনই উহার প্রয়োজন অপরিহার্য্য, যদি তাহা না হয়, শুধু বিশ্লেষণধারা দ্বারা খতাইয়া দেখিয়া উহার ভিতরে পৌঁছাইতে পারিব না। পাটিগণিতের এই অনুকলন (infinitesimal analysis) চৌহদ্দিতে (domain) আমাদের স্বভাবতই মনে হইতে পারে যে আমরা ক্ষুদ্রাতিক্ষুদ্র বিশ্লেষণ হইতে বহুদূরে পড়িয়াছি কিন্তু—এ কথা জানা ভাল—অঙ্কশাস্ত্রগত-অসীমতার ভাবরূপ এখানে, ইতিমধ্যেই একটি অবিশ্বাস্য রকমের গুরুত্বপূর্ণ খেলা খেলিয়াছে, দিক খুলিয়াছে—যাহা ছাড়া কোন বিজ্ঞানই সম্ভব হইত না—এই জন্য বলা যে উহা ছাড়া কোন কিছুই সাধারণ রূপে দেখা দিত না।

—আঁরি প্যাওয়াঁকারে কৃত 'সায়েন্স ও হাইপথেসিস' হইতে কমলকুমার মজুমদার অনূদিত।

লুইস্ ক্যারল হইতে একটি প্রশ্ন

একটি বাক্সে দুইটি বল আছে। বল দুইটির সম্বন্ধে কেবল জানা আছে যে তাহাদের প্রত্যেকটির রং হয় কালো না হয় সাদা। বাক্স হইতে বল দুইটি বাহির না করিয়া তাহাদের রং বল?

(উত্তর অপর পৃষ্ঠায়)

৭৫ পৃষ্ঠার প্রশ্নের উত্তর

উত্তর : একটি কালো একটি সাদা

আমরা জানি যে কোন বাক্সে দুইটি কালো বল এবং একটি সাদা বল থাকিলে একটি কালো বল তুলিবার সম্ভাবনা হইতেছে $\frac{২}{২+১}=\frac{২}{৩}$ এবং অন্য কোনরকম সম্মেলনে এই সম্ভাব্যতা পাওয়া যাইবে না।

বাক্সে নিম্নোক্ত সম্মেলন হইতে পারে—

(ক) কালো + কালো

(খ) কালো + সাদা

(গ) সাদা + সাদা

এবং এইগুলির সম্ভাব্যতা যথাক্রমে

(ক) $\frac{১}{৪}$ (খ) $\frac{১}{২}$ (গ) $\frac{১}{৪}$

এখন আর একটি কালো বল দেওয়া হইল। কাজেই নিম্নোক্তরূপ সম্মেলন হইল

(ক) কালো + কালো + কালো

(খ) কালো + সাদা + কালো

(গ) সাদা + সাদা + কালো

এবং তাহাদের সম্ভাব্যতা আগের মতই যথাক্রমে

(ক) $\frac{১}{৪}$ (খ) $\frac{১}{২}$ (গ) $\frac{১}{৪}$

এখন উপরোক্ত সম্মেলন হইতে একটি কালো বল তুলিবার সম্ভাব্যতা

$$\frac{১}{৪}\cdot১+\frac{১}{২}\cdot\frac{২}{৩}+\frac{১}{৪}\cdot\frac{১}{৩}=\frac{২}{৩}.$$

অর্থাৎ এখন বাক্সটিতে নিশ্চয়ই দুইটি কালো এবং একটি সাদা বল আছে; কেননা আগেই বলা হইয়াছে অন্য কোনরকম সম্মেলনে আমরা $\frac{২}{৩}$ সম্ভাব্যতা পাইতে পারি না।

অতএব প্রথমে (অর্থাৎ, কালো বলটি যোগ করিবার আগে) বাক্সে নিশ্চয়ই একটি কালো এবং একটি সাদা বল ছিল।

—লুইস্ ক্যারল এর Pillow Problems হইতে দেবিদাস মুখোপাধ্যায় অনূদিত।